



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA – UNIR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ERILDO SOUSA DA SILVA

O ENSINO DA TEORIA DA CONTAGEM NO ENSINO MÉDIO

PORTO VELHO - RO
2016

ERILDO SOUSA DA SILVA

O ENSINO DA TEORIA DA CONTAGEM NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob a orientação do professor Dr. Flávio Batista Simão.

PORTO VELHO-RO

2016

FICHA CATALOGRÁFICA
BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

Silva, Erildo Sousa da.

S586e

O ensino da teoria da contagem no ensino médio. / Erildo Sousa da Silva, Porto Velho, 2016.

106f.; il.

Orientador: Prof. Dr. Flavio Batista Simão

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2016.

1. História da matemática. 2. O ensino da matemática no Brasil. 3 Teoria da análise combinatória. I. Fundação Universidade Federal de Rondônia. II. Título.

CDU: 51:37

Bibliotecário responsável: Luã Silva Mendonça- CRB11/905

ERILDO SOUSA DA SILVA

O ENSINO DA TEORIA DA CONTAGEM NO ENSINO MÉDIO

Este trabalho foi julgado e aprovado para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, Polo da Universidade Federal de Rondônia.

Porto Velho, 22 de Novembro de 2016.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Flávio Batista Simão
Orientador/Presidente
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez
PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Eudes Barroso Junior
UNIR

PORTO VELHO - RO
2016

*Dedico esta dissertação à minha esposa Márcia,
aos meus filhos, Ketlyn, João Vitor e Júlia,
que são as razões da minha vida.*

*Dedico também ao meu pai Bernardino,
ao meu irmão Everaldo, que me aconselha nas horas de angústia,
à minha prima Renata, em especial,
uma incentivadora desta realização,
e à toda a minha família.*

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida, pela proteção, por todas as conquistas alcançadas e por ter me dado força nos momentos difíceis.

Aos meus pais Bernardino e Ana, e à minha madrastra Jacira, a quem considero como segunda mãe, por terem me ensinado a viver com dignidade, pelo amor, pela dedicação e pela confiança.

Aos meus colegas de trabalho, que sempre estiveram me incentivando e me dando força para que eu nunca desistisse deste meu sonho, sem me esquecer de meu grande amigo professor Francisco Galdino Dantas, a quem tenho enorme gratidão.

Ao meu orientador Professor Dr. Flávio Batista Simão, os meus sinceros agradecimentos, pela dedicação, carinho, humildade e imensa capacidade que teve em transmitir conhecimentos, quero agradecer pelo grande apoio e colaboração que dedicou ao longo das orientações deste trabalho.

Aos professores Dr. Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz, Dr. Marinaldo Felipe da Silva, Dr. Adeilton Fernandes da Costa, Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez, Me. Ronaldo Chaves Cavalcante, integrantes do Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, ministrado no Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, que contribuíram de maneira expressiva para a minha formação acadêmica dentro deste programa.

Aos colegas de curso Antenor Rafael Bisconsin, Antônio Carlos Valério, Josivaldo Roque Pereira, Maily Marques Pereira, Patrícia Feitosa Basso Miranda, Railei Garcia Leal, Samanta Margarida Milani, e em especial, aos amigos e irmãos do peito, Aquiles Rocha Lira Bezerra, Charles Montenegro Medeiros de Cantai, Gisera Dal Santo e Marilei Rodrigues. Agradeço pelas horas de estudos que tivemos, uns auxiliando aos outros, e pelos encontros que tivemos para estudarmos em grupo, foi muito válido, pois sem esses grupos de estudos tudo seria mais difícil, eu agradeço por tudo, meus amigos, pois sem vocês, eu não teria conseguido chegar até aqui.

Aos idealizadores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, e ainda pelo material didático, rico em informações e detalhes que, com certeza, será utilizado como material de apoio e pesquisa por todos nós.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa de estudos recebida, que me permitiu a condição para participar do programa e aprimorar os meus conhecimentos.

RESUMO

A presente dissertação versou sobre O Ensino da Teoria da Contagem no Ensino Médio. O objetivo principal deste trabalho foi apresentar uma reflexão sobre a prática docente de Matemática no Ensino Médio, assim como demonstrar algumas técnicas e experiências realizadas na E.E.E.F.M. 28 de Novembro em Ouro Preto do Oeste – RO, as quais ajudam o aluno a aprender brincando e se divertindo, de modo descontraído e alegre, demonstrando grande eficácia tanto no aprendizado dos conteúdos ensinados, quanto em relação ao interesse dos alunos em quererem permanecer estudando, por mais tempo. Para tanto, definiu-se, como objeto de estudo, a Análise Combinatória, por se tratar de importante componente curricular constante do Plano Curricular Nacional (PCNs).

Palavras-Chave: Ensino Médio. Matemática. Análise Combinatória.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to reflect about Mathematic Teachings in High School and show some important techniques and experiments with students of E.E.E.F.M. 28 de Novembro school in Ouro Preto do Oeste – RO – Brazil, that shows the students learning Mathematic playing and having fun in the classroom, relaxed and cheerful, showing great efficiency in learning the taught contentes and in relation to the students' interest in staying more time learning. Combinatorial andysis was chosen how subject for this study, because it is na important subject componente of the national curriculum (PCNs)

Keywords: High School. Mathematics. Combinatorial Analysis.

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Calendário de Atividades - Laboratório de Matemática 64

TABELA 2 - Rendimento Escolar do Ensino Médio no 3º. Bimestre – 2014 65

TABELA 3 - Rendimento Escolar do Ensino Médio no 3º. Bimestre – 2015 65

TABELA 4 - Rendimento Escolar do Ensino Médio no 3º. Bimestre – 2016 66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - “ <i>Stomachion</i> ”	18
Figura 2 - Expulsão dos Jesuítas.....	27
Figura 3 - Triângulo de Pascal com Binomiais	54
Figura 4 - Triângulo de Pascal (soma de dois binomiais que estão acima) ...	55
Figura 5 - Triângulo de Pascal e a Soma dos Elementos de cada linha	56
Figura 6 - Soma dos Números de uma Coluna no Triângulo de Pascal	56
Figura 7 - Soma dos Elementos de uma Diagonal no Triângulo de Pascal	57
Figura 8 - Número de Fibonacci obtidos na soma da diagonal inversa	58
Figura 9 - Desenvolvimento de Potências da Forma $(x + a)^n$	59
Figura 10 - Desenvolvimento das Potências na forma Binominal	60
Figura 11 - Números com três algarismos	66
Figura 12 - Diagrama de Árvore	67
Figura 13 - Arranjo feito pelos alunos com 3 mochilas	69
Figura 14 - Alunos do 2º. ano A mostrando na prática a maneira de organizar três mochilas em três cadeiras	69
Figura 15 - Arranjos realizados pela aluna Karielhe	70
Figura 16 - Alunos mostrando quantos são os arranjos	72
Figura 17 - Triângulos a partir de 4 pontos	74
Figura 18 - Aluno demonstrando padrões na lousa	75
Figura 19 - Alunos do 2º ano A descobrindo quantos triângulos podem formar	75
Figura 20 - Alunos do 2º. ano A recortando material para montar triângulo de Pascal	77
Figura 21 - Alunos do 2º. ano A raciocinando para montar o triângulo de Pascal ...	77
Figura 22 - Aluna do 2º. ano A descobrindo os padrões	78
Figura 23 - Alunos do 2º. ano A procurando os números naturais que irão colocar na próxima linha	78
Figura 24 - Alunos do 2º. ano A construindo o Triângulo de Pascal	79
Figura 25 - Triângulo de Pascal, trabalho concluído no 2º. Ano A	79
Figura 26 - Triângulo de Pascal colorido pelos alunos do 2º. Ano A	79
Figura 27 - Alunos do 2º. ano C no laboratório de Matemática	80
Figura 28 - Alunos do 2º ano C construindo o Triângulo de Pascal	80
Figura 29 - Triângulo de Pascal Isósceles pelos Alunos do 2º ano C	81
Figura 30 - Alunos do 2º ano C construindo o Triângulo de Pascal com binomiais	81
Figura 31 - Triângulo de Pascal elaborado pelos Alunos do 2º ano C	81

LISTA DE SIGLAS e TERMOS TÉCNICOS

ABE	- Associação Brasileira de Educação
CENP	- Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas
DNE	- Departamento Nacional de Ensino
PCN	- Plano Curricular Nacional

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	14
1.1. História da Contagem	16
2. O ENSINO DA MATEMÁTICA NO BRASIL	22
2.1. Ensino da Matemática no Ensino Médio	29
2.2. A História da E.E.E.F.M. 28 de Novembro	32
2.2.1. O Ensino da Matemática na E.E.E.F.M. 28 de Novembro	36
3. TEORIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA	39
3.1. Princípio Multiplicativo	39
3.2. Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo da Contagem	40
3.3. Permutação Simples e Fatorial de um Número Natural	42
3.4. Permutação com Elementos Repetidos	44
3.5. Arranjos Simples	45
3.6. Combinações Simples	47
3.7. Número Binomial	50
3.7.1. Propriedades do Número Binomial	50
3.8. Triângulo de Pascal ou Triângulo de Tartaglia	53
3.9. Binômio de Newton	58
3.10. Termo Geral do Binômio de Newton	62
4. TÉCNICAS DE ENSINO	63
4.1. Aplicação das Atividades	66
CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	84
APÊNDICE A - ATIVIDADE BUSCANDO PADRÕES	90
APÊNDICE B - RESPOSTAS DOS ALUNOS AO QUESTIONÁRIO	91
APÊNDICE C - RELATOS DOS ALUNOS	96
APÊNDICE D - DEPOIMENTOS DOS ALUNOS	101

INTRODUÇÃO

A presente dissertação abordará O Ensino da Teoria da Contagem no Ensino Médio. Como principal objetivo pretende-se promover a reflexão sobre a prática docente em Matemática no âmbito do Ensino Médio, apresentando as técnicas utilizadas frente aos alunos pertencentes a esta fase de formação, bem como os resultados positivos observados ao longo das experiências realizadas no dia a dia. Terá por objeto deste estudo a Análise Combinatória, por tratar-se de importante componente curricular constante do Plano Curricular Nacional (PCNs).

No mundo globalizado em que vivemos, temos que buscar mudanças e encontrar novidades sempre que possível, por isso, esta dissertação foca exatamente este ponto, a necessidade constante do buscar e de refletir sobre novas técnicas, para acompanharmos a velocidade da comunicação no mundo moderno.

E é neste sentido que, nós, professores de Matemática, sabemos das dificuldades relacionadas ao despertar do gosto dos alunos por esta disciplina, tanto quanto na execução dos muitos exercícios necessários ao seu aprendizado. Estamos, a todo o momento, buscando novos caminhos e novos modos de ensinar, e é neste sentido que esta pesquisa foi desenvolvida, movida pela busca por novas maneiras de ensinar.

Minha história com a escola iniciou-se em 1985, quando me matriculei na 5ª. série do antigo ginásio. Eu vim da zona rural estudar nesta linda escola, mas naquele primeiro ano eu quase reprovei, uma vez que fiquei em 8 componentes curriculares para fazer o exame final, e, na sequência, em três componentes para recuperação, mas eu obtive êxito. Nos anos seguintes eu passei a ser sempre aprovado com os melhores conceitos, mas, infelizmente, no oitavo ano, e por motivo de trabalho, eu acabei reprovado. Entretanto, consegui ser aprovado no ano seguinte.

Entre os anos de 1990 a 1992, mudei de escola para cursar o magistério, para exercer a profissão de professor; em junho de 1993 eu retornei para a minha atual escola para exercer a docência. Fui lotado na 4ª. série primária, à época; no ano seguinte, fui convidado pela direção para assumir as turmas do antigo ginásio, eram as 5ªs. e 6ªs. séries, fiquei trabalhando durante uns dois anos, e, posteriormente, assumi também as 7ªs. e 8ªs. séries.

Em 2009 fui lotado no Ensino Médio, no qual eu permaneço lecionando até os dias de hoje. Em 2000 fui aprovado no concurso vestibular – PROHACAP, concluindo o curso de graduação em Matemática em fevereiro de 2004, vindo a colar grau em 22 de julho de 2004. Sempre procurei realizar o meu trabalho com muita dedicação, compromisso e responsabilidade, sempre estudando muito, a tal ponto de ter sido privilegiado em realizar, por duas vezes, o exame de acesso do PROFMAT. Da primeira vez eu fiquei em 22º. lugar, mas na segunda vez eu consegui ficar entre os 15 primeiros e ser classificado, quando então foi-me possível realizar mais um sonho, o de ser mestre em Matemática.

A estrutura definida para este texto consistirá em apresentar, no Capítulo 1 – História da Matemática. No Capítulo 2, será a vez de apresentarmos o Ensino da Matemática no Brasil, desde a sua chegada estendendo-se até os nossos dias, destacando-se os entraves e desafios encontrados aqui, relata também sobre a história da escola 28 de novembro e do referido mestrando.

Em terceiro lugar, e, sendo o assunto principal desta dissertação, o Capítulo 3 focará no ensino da Análise Combinatória, sua definição, seus múltiplos usos no cotidiano das pessoas, e a importância que ela tem na formação discente de modo geral.

Por fim, no Capítulo 4 – Técnicas de Ensino, serão apresentadas algumas técnicas práticas que foram desenvolvidas com as turmas de alunos do 2º. Ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio 28 de Novembro de Ouro Preto do Oeste – RO.

Também serão demonstradas as atividades realizadas no laboratório de Matemática, através das quais os alunos aprender brincando, divertindo-se, de modo descontraído e alegre, que resultam positivamente, tanto no aprendizado dos conteúdos da Análise Combinatória, quanto em relação ao interesse dos próprios alunos em permanecer mais tempo estudando.

O entusiasmo dos estudantes, face às técnicas apresentadas em sala de aula, assim como os resultados obtidos demonstram que toda e qualquer tentativa de inovação vale a pena, porque facilita inclusive o trabalho docente de Matemática, e que nós professores não temos que temer “o novo”; ao contrário, precisamos acompanhar os avanços tecnológicos e usá-los em benefício da prática docente desta disciplina tão fascinante.

1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A História da Matemática não se restringe simplesmente aos relatos ou averiguações dos fatos mais relevantes, ao longo do período que se objetiva, mas compreender as origens e as causas que nos fornecem fatos relativos ao passado. Segundo Pedroso (2009), apenas narrar um acontecimento histórico, ou até mesmo a história de uma nação, em si, não demonstra a sua real importância, já que não se pode sintetizar, apenas para estímulo da mocidade, a consagração de heróis a partir da lembrança de glórias que ficaram registradas.

Na prática, a história permite, aos que por ela se interessem, a compreensão sobre o passado; esclarecimentos acerca do presente, e ao mesmo tempo, prever o futuro, ou até mesmo, previsões sobre as expectativas do desdobramento e do acontecimento no caso em estudo, no alcance do nosso conhecimento das leis e das causas que as regem (PEDROSO, 2009).

Ao longo das pesquisas sobre a História da Matemática, foi possível perceber que, inicialmente, para realizar qualquer soma, o método utilizado estava associado aos dedos das mãos e pés, mas em não sendo suficientes, foram associados a montes de pedras, de quintuplos em quintuplos. Os estudiosos destacam que, assim como “a ideia do número tornou-se suficientemente ampla e vivida”, foi através do desenvolvimento da linguagem, capacidade exclusiva dos seres humanos, que foi possível o desenvolvimento da observação do concreto para o abstrato, tão fundamental para os conceitos matemáticos. Existem também teorias defendendo que o “aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo” (BOYER, 2011, p.1).

Lima (2009, p.3, apud BOYER, 1996, p. 1) explica que:

Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbre de noções matemáticas se encontra em formas de vida que podem datar de milhões de anos antes da humanidade.

O início da utilização de algum sistema que compreendesse conceitos sobre “grandeza, forma e número” surgiu com “o homem primitivo, sendo que as primeiras evidências arqueológicas do conceito de número e do processo de contagem: há aproximadamente 50.000 anos”. Arruda (2012, p.5) refere como exemplo que “uma tribo tinha naturalmente a necessidade de saber quantos eram seus membros

integrantes e quantos eram seus inimigos. Também era importante a um homem saber se seu rebanho estava diminuindo”.

Neste sentido Vasquez e Noguti (2004, p.3 apud WILSON, 1990) referem que:

as regras básicas de contar e suas aplicações têm sido enfatizadas, desde as civilizações mais antigas por exemplos absurdos onde era destacada a alusiva propriedade da memorização, como o Problema 79 do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C.) que segue: Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens têm ao todo? Ou também o problema da construção de quadrados mágicos.

Entretanto, foi a partir do século XIX que a Matemática conquistou sua real importância na vida dos indivíduos. Os estudiosos relatam que há indícios sobre “a sua descoberta ter ocorrido não por uma determinada pessoa ou uma tribo, já que é mais plausível que a percepção tenha sido gradual, surgida tão cedo no desenvolvimento cultural do homem quanto o uso do fogo, talvez há 300.000 anos” (BOYER, 2011, p.1).

No intervalo entre 4000 a 3000 a. C., durante o Era Neolítica, período que também ficou conhecido como Pedra Polida, a cultura tinha uma relação próxima com as regiões do Egito assim como da Mesopotâmia, as quais eram muito bem organizadas, apesar de serem civilizações muito diferentes (VIEIRA, 2009).

Enquanto Heródoto¹, importante historiador da Grécia Antiga, defendia que a Geometria nascera no Egito, talvez em um momento em que desejaram estabelecer o tamanho e as medidas das terras a cada inundação do Rio Nilo; Aristóteles², filósofo, professor e metafísico da Macedônia, atribuía o desenvolvimento dos números ao tempo livre dos sacerdotes (BOYER, 2011, p.1).

O fato é que, a despeito das incertezas sobre o real surgimento dos números e dos cálculos, Boyer (2011) defende, acerca dessas teorias, que os desenhos e figuras deixados ao longo da história pelas antigas civilizações demonstram

¹ **Heródoto** (484 a.C.-425 a.C.) foi um importante historiador grego da antiguidade. Foi considerado pelo filósofo Cícero, o pai da História. Revelou as primeiras conquistas dos persas na Grécia, as várias formas de governo, até a retomada do poder pelos gregos. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/herodoto/>; acesso em: 25 ago 2016.

² **Aristóteles**. Notável filósofo grego, Aristóteles (384 – 322.a.C.) nasceu em Estágira, colônia de origem jônica encravada no reino da Macedônia. Filho de Nicômaco, médico do Rei Amintas, gozou de circunstâncias favoráveis para seus estudos. Biografia. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/cesima/schenberg/alunos/paulosergio/biografia.html>; acesso em 23 ago 2016.

necessidades e preocupações com as relações espaciais que, certamente, permitiram o desenvolvimento da Geometria.

Os avanços que “marcaram o fim da pré-história e que originaram a escrita verificaram-se com muita intensidade e rapidez no Egito”. A partir do momento em que as técnicas da agricultura, do artesanato e até do comércio entre os povos foram se desenvolvendo, especialmente quando as ambições humanas levaram os egípcios a idealizar as maravilhosas pirâmides, construções que necessitaram de muitas pedras, muito tempo e muitos trabalhadores. Foi o momento em que perceberam a necessidade de aprender a elaborar cálculos, cujas representações foram feitas por desenhos (SANTOS, 2015).

1.1. História da Contagem

Garcia (2013, p.30) ensina que a Análise Combinatória “trata das questões que envolvem a contagem de subconjuntos de um conjunto finito sem que seja necessário enumerar seus elementos, dispondo de várias técnicas: arranjos, combinações e permutações”. São técnicas geralmente utilizadas no Ensino Médio para resolver certos tipos de problemas, exigindo a compreensão plena da problemática apresentada, uma vez que alguns problemas fáceis de enunciar tornam-se por vezes, difíceis, exigindo muita criatividade para a sua solução.

Vega e Borba (2014, p.30) define que:

Raciocínio combinatório é a forma de pensar sobre situações, envolvendo o levantamento de possibilidades que atendem a determinadas condições, que consideram se há repetição, escolha e ordenação de elementos, dentre outras relações. Essa maneira de raciocinar é uma competência mais complexa e que deve ser estimulada pela escola, pois se constitui em base para a resolução de situações problemas.

Ainda Garcia (2013, p.11 apud ROA e NAVARRO-PELAYO, 2001, p.1) refere que:

os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Vega e Borba (2014, p.33) relatam que para cada tipo de problema combinatório, conforme as etapas escolhidas de uma forma ou de outra, para a solução da questão proposta. Em exemplo dado por estas autoras, tem-se que:

em *produtos cartesianos* são elementos de conjuntos que devem ser combinados, em *permutações*, são a quantidade de elementos a serem permutados entre si, já em *arranjos* e *combinações*, são a escolha de alguns elementos que precisam ser arranjados ou combinados, sendo a diferença entre eles, a de que no *arranjo* a ordem influencia na constituição de novas possibilidades e na *combinação* a ordem não gera possibilidades distintas.

Pode-se dizer que a análise combinatória é um conjunto de possibilidades elaborado a partir de elementos finitos, com base em critérios que permitam a contagem. Os estudos analisados por Garcia (2013, p.30) demonstram que, em geral, os alunos já conhecem parte dos raciocínios da combinatória. Este autor ensina que, antes mesmo de aprendê-la eles já a conhecem, devido ao fato de conseguirem escolher “os elementos de um conjunto para combiná-los, mas apresentam dificuldades em outras relações combinatórias, como a consideração ou não, da ordem dos elementos e o esgotamento de todas as possibilidades”.

Neste sentido, estudos elaborados a partir da observação de alunos da Educação Infantil demonstram evidências quanto ao fato das crianças apresentarem conhecimentos intuitivos a respeito da combinatória, por exemplo, quando aprendem a escolher o que vestir e o que calçar (VEGA e BORBA, 2014, p.31-32, apud MATIAS, SANTOS e PESSOA, 2011; PESSOA e BORBA, 2012).

A Matemática tem se tornado objeto de inúmeras discussões, as quais são de suma importância, principalmente no que refere aos modos de ensinar mais clara e facilmente os conteúdos programáticos, assim como todos os ramos da Matemática, para que o aluno venha a entender mais rápido. Nesta perspectiva, Análise Combinatória serve bem a esse propósito.

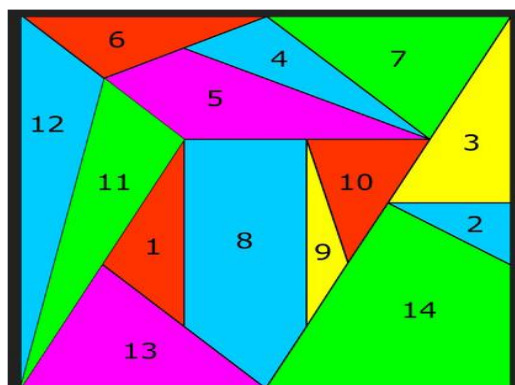
Segundo Cataldo (2013, p.1), acredita-se que o interesse pela elaboração de cálculos surgiu em função de compreender-se “o número de possibilidades existentes de resultados dos jogos”, permitindo assim o desenvolvimento dos métodos de contagem. Nas palavras do autor,

a análise combinatória é uma consequência do desenvolvimento de métodos que permitem contar, de forma indireta, o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições. Por sua vez, pode-se dizer que a teoria das probabilidades decorre da necessidade de avaliar hipóteses e de tomar decisões.

Para Garcia (2013, p.13-14), foi o matemático grego Arquimedes de Siracusa (287.a.C. – 212 a.C.) que propôs pela primeira vez um problema geométrico que

ficou muito famoso, problema que foi denominado *Stomachion*, do grego “*stomachos*”, que traduzido para o português significa estômago. “O problema a ser resolvido consistia em saber de quantas maneiras poderiam ser reunidas 14 peças planas, de diferentes formatos e tamanhos, para formar um quadrado”.

Figura 01 - “*Stomachion*”



Fonte: Garcia (2013, p.14)

Estima-se que os cálculos sobre a Análise Combinatória surgiram por volta de 300 a.C., uma vez que já existiam registros sobre o desenvolvimento do caso $n = 2$ e do binômio $(1 + x)^n$ nos Elementos de Euclides. Por sua vez, o Triângulo de Pascal já era conhecido pelo matemático chinês Chu Shih-Chieh, por volta de 1300. Existem ainda registros sobre a tentativa do francês Levi ben Gerson³ (1288 – 1344) em demonstrar o 5º. Postulado de Euclides; já o matemático alemão Michael Stifel⁴ (1486 – 1567) mostrou como calcular $(1 + x)^n$ a partir do desenvolvimento de $(1 + x)^{n-1}$, aproximadamente em 1550 (MORGADO, 1991).

No final do século X o matemático islâmico Al-Karaji⁵ demonstrou conhecimentos sobre a lei da formação dos elementos do triângulo de Pascal, $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$, uma vez que o primeiro surgimento do triângulo de Pascal no

³ **Levi ben Gershon** (1288–1344), filósofo, matemático, físico, astrônomo e astrólogo. Disponível em: [\[https://en.wikipedia.org/wiki/Gersonides\]](https://en.wikipedia.org/wiki/Gersonides); acesso em 18 jul 2016.

⁴ **Michael Stifel** (1486 – 1567) matemático alemão. Disponível em: [\[http://www.somatematica.com.br/biograf/stifel.php\]](http://www.somatematica.com.br/biograf/stifel.php); acesso em 18 jul 2016.

⁵ **Abu Bakr Karaji** (Século X). matemático islâmico, famoso pela aritmetização da álgebra. Disponível em: [\[http://www.islamreligion.com/pt/articles/4761/um-breve-olhar-sobre-contribuicao-do-islam-para-matematica/\]](http://www.islamreligion.com/pt/articles/4761/um-breve-olhar-sobre-contribuicao-do-islam-para-matematica/); acesso em 18 jul 2016.

Ocidente foi no frontispício de um livro de Petrus Apianus⁶ (1495 – 1552).

Em 1654, o físico, matemático, filósofo e teólogo francês, Blaise Pascal (1623 – 1662), publicou um tratado demonstrando como achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$; em 1713, o suíço Jaime Bernoulli⁷ (1654 – 1705) demonstrou a fórmula abaixo usando a interpretação de Pascal $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$ (MORGADO, 1991).

Por sua vez, o físico, matemático e astrônomo inglês Isaac Newton⁸ (1646 – 1727) demonstrou que cada coeficiente pode ser determinado, usando o anterior, pela fórmula: $\binom{n}{r+1} = \frac{n-1}{r+1} \binom{n}{r}$.; (MORGADO, 1991).

Outro matemático, físico e astrônomo francês, Jacques Phillipe Marie Binet⁹ (1786 – 1856) apresentou como achar os números de Fibonacci; sem precisar calcular todos eles (MORGADO, 1991).

Segundo Cataldo (2013), a Análise Combinatória surgiu aproximadamente há 500 anos (século XVII), a abordagem matemática nasceu pelas mãos de Blaise Pascal (1623-1662) e de Pierre de Fermat (1601-1665), uma vez que conseguiram resolver problemas relacionados aos jogos de azar. Eles impulsionaram o desenvolvimento da área da Matemática.

Blaise Pascal foi filósofo e príncipe matemático francês, que já aos 12 anos de idade, demonstrou grande talento para a Geometria; aos 19 anos, inventou a primeira máquina de calcular digital, para ajudar o pai, que era cobrador de impostos; com 20 anos, interessou-se pela física e escreveu um trabalho sobre pressão atmosférica, resultando no Princípio de Pascal (CATALDO, 2013).

⁶ **Petrus Apianus** (1495 – 1552) foi um matemático, astrônomo, cartógrafo e humanista alemão. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Petrus_Apianus]; acesso em 18 jul 2016.

⁷ **Jaime Bernoulli** – matemático suíço. Disponível em: [<https://translate.google.com.br/translate?hl=pt-BR&sl=en&u=http://www.mhhe.com/math/calc/smithminton2e/cd/tools/timeline/bernoulli.html&prev=search>]; acesso em 18 jul 2016.

⁸ **Isaac Newton** (1646 – 1727). Físico, matemático e astrônomo inglês. Disponível em: [<http://educacao.uol.com.br/biografias/isaac-newton.htm>]; acesso em 18 jul 2016.

⁹ **Jacques Phillipe Marie Binet** (1786 – 1856). Matemático, físico e astrônomo francês. Disponível em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet]; acesso em 18 jul 2016.

“O princípio de Pascal diz que a pressão em qualquer ponto de um fluido é a mesma, de forma a que a pressão aplicada num ponto é transmitida a todo o volume do contentor. Este é o princípio do macaco e do martelo hidráulicos”. Publicou ainda o Tratado sobre o equilíbrio dos líquidos, no qual relacionou a pressão dos fluidos e a hidráulica (CATALDO, 2003, p.2).

Pascal aprofundou seus estudos e publicou um estudo sobre o Triângulo Aritmético, “uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e das relações entre eles” (CATALDO, 2003, p.2), que já teria sido estudado pelos matemáticos árabes e chineses. Ficou conhecido como o Triângulo de Pascal, que apresenta “um arranjo triangular de números em que cada número é igual à soma do par de números acima de si” (SÓ MATEMÁTICA, 2016).

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um importante advogado e juiz francês, durante o reinado de Luis XIV, sendo considerado o fundador da Geometria Analítica. Estudioso da Matemática, foi através do livro “Aritmética”, de Diofanto¹⁰, que ele desenvolveu a Teoria dos Números, na qual defendia que “se a probabilidade de uma face de um dado é $1/6$, em 100 experiências sucessivas independentes cerca de $100/6$ vezes essa face aparecerá, em 1000 experiências sucessivas independentes cerca de $1000/6$ vezes essa face aparecerá, etc.” (ALEA, 2016).

Cataldo (2003, p.2) refere outros nomes importantes para as descobertas matemáticas, foram eles: “Christiaan Huygens¹¹ (1629-1695), que tratou a Matemática como uma ciência; Jakob Bernoulli (1654-1705) que escreveu a *Arte da*

¹⁰ Diofanto de Alexandria tem o seu nome ligado à cidade que foi o maior centro de atividade matemática na Grécia antiga. Pouco se sabe acerca da sua vida, o desconhecimento impede-nos mesmo de fixar com segurança em que século viveu. Têm sido sugeridas datas distanciadas de um século, antes ou depois do ano 250 d. C. Por uns versos encontrados no seu túmulo, escritos em forma de um enigmático problema, deduz-se que viveu 84 anos. Disponível em: [\[http://www.somatematica.com.br/biograf/diofanto.php\]](http://www.somatematica.com.br/biograf/diofanto.php); acesso em 18 jul 2016.

¹¹ **Christiaan Huygens** (1629-1695) nasceu em Haia, na Holanda, em uma família que dava grande valor ao aprendizado e ao estudo científico. Ele recebeu uma boa educação, que incluiu aulas em casa, com o pai, professores particulares e a Universidade de Leiden. Huygens começou a se interessar por telescópios quando ajudou seu irmão a construir um. Os telescópios de sua época geravam imagens ruins porque as lentes atuavam como prisma e formavam uma imagem diferente para cada cor. A solução de Huygens foi empregar uma lente de comprimento focal longo. Ele construiu um telescópio com uma lente principal de cinco centímetros de diâmetro, mas com distância focal de sete metros. Era necessário muita habilidade e paciência para confeccionar e usar um telescópio tão grande e sem jeito. Disponível em: [\[http://www.ahistoria.com.br/biografia-christiaan-huygens/\]](http://www.ahistoria.com.br/biografia-christiaan-huygens/); acesso em 18 jul 2016.

Conjectura, publicado em 1713, e Abraham de Moivre (1667-1754) que, em 1718, escreveu a *Doutrina da Probabilidade*".

O valor da Análise Combinatória é inegável, enquanto ferramenta para inúmeras áreas e campos de aplicações. Ela permite a elaboração de situações e de problemas variados, sendo útil na construção de conjecturas; vai muito além do mero estudo das combinações, dos arranjos e permutações, porque ultrapassa esses limites, uma vez que a Análise Combinatória trata de vários outros tipos de problemas.

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas: o Princípio de Inclusão – Exclusão e o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Ela é tão importante que está prevista no currículo do Ensino Médio nas escolas brasileiras, já que é conteúdo de destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dada a sua importância na formação dos estudantes do Ensino Médio, no que se refere aos cálculos de estatística e probabilidades (MORGADO, 1991).

Nas últimas décadas a Análise Combinatória cresceu muito. Em decorrência das necessidades em Teoria dos Gráfos, e em Análise de Algoritmos. Em 1937 o matemático húngaro George Pólya (1887 – 1985) criou nova técnica de enumeração, que é utilizada de muitas maneiras. Um exemplo de Teoria de Pólya é o de tetraedros regulares "diferentes" com faces pintadas com duas cores, preto e branco, por exemplo (MORGADO, 1991).

2. O ENSINO DA MATEMÁTICA NO BRASIL

Quando se busca a História da Matemática no Brasil, surge logo uma grande dificuldade, que consiste na falta elementar de fontes, uma vez que, durante muito tempo, teve pouco valor e reconhecimento. O ensino de matemática era visto apenas como uma disciplina obrigatória, servindo apenas para que o currículo elaborado e aprovado pela legislação fosse cumprido, assim como ser um degrau para outros cursos. Vejamos o que diz Brito (2007, p.1): “mesmo nós que estudamos durante anos em curso superior conhecemos muito pouco no que se refere à História Geral da Matemática, que se desenvolveu ao longo do tempo, e deixamos passar despercebida a História da Matemática do nosso país”.

Assim, com este capítulo, pretende-se mostrar os caminhos e descaminhos pelo quais o ensino da Matemática passou ao longo de sua história no Brasil.

A efetivação do ensino de Matemática no Brasil só começou a ocorrer em 1808, com a criação da Academia Real Militar na Corte do Rio de Janeiro. O curso de matemática constava do currículo da academia que durava quatro anos, porém a institucionalização do Ensino da Matemática Superior no Brasil começou em 1810, cognominada Aritmética praticamente não existia (BRITO, 2007).

No período do Brasil colônia até 1810, há pouco o que se relatar sobre a história da Matemática. Brito (2007) explica que à época, o país não tinha interesse nem estrutura para ensinar matemática, uma vez que o objetivo era claramente, ensinar para a igreja.

Os jesuítas foram os criadores das primeiras escolas no Brasil. O Padre Manoel da Nóbrega¹² (1517 – 1570) chegou aqui em 1549, sendo que em março do mesmo ano tomou providências para a criação de uma escola de primeiras letras. Dessa forma, em 15 de abril de 1549 foi fundada, em Salvador, Bahia, a primeira escola primária no Brasil, onde se ensinava a ler e escrever (BRITO, 2007).

¹² Manoel da Nóbrega nasceu em Portugal, em 18 de outubro de 1517. Estudou na Universidade de Salamanca, Espanha, entre 1534 e 1538, e bacharelou-se em direito canônico em 1539, em Coimbra. Em 1544, entrou para a Companhia de Jesus. Disponível em: [<http://www.historia-brasil.com/colonia/nobrega.htm>]; acesso em 02 ago 2016.

Segundo Gomes (2012), havia pouco espaço para os conhecimentos matemáticos, mas grande destaque para o aprendizado do latim. Estudos realizados por vários pesquisadores conduzem à ideia geral de que os estudos matemáticos eram realmente pouco desenvolvidos no ambiente jesuíta. Em resumo, o que se conhece dessa fase é que o número de aulas de Matemática era pequeno e essas aulas tinham baixa frequência.

Logo, o ensino das matemáticas era muito precário nesse período, e, quando existia, era só nas escolas jesuítas e não passava das quatro operações algébricas e a geometria. A partir de 1808, com a chegada da Família Real portuguesa ao Brasil, muitos brasileiros foram estudar em Portugal na Universidade de Coimbra, voltando doutores em matemática para contribuir com o ensino no Brasil. Entre vários deles, merecem destaque: Antônio José do Amaral¹³ (1782 – 1840), Francisco Cordeiro da Silva Torres e Alvim¹⁴ (1775 – 1856), José Vitorino dos Santos e Souza¹⁵ (1780 – 1852), Manuel Ferreira de Araújo Guimarães¹⁶ (1777 – 1838). Estes foram os primeiros professores de matemática com curso superior no Brasil (BRITO, 2007).

Segundo Santos (2015b, p.17),

¹³ Antônio José do Amaral (Rio de Janeiro, 1782 -?, 1840) foi um professor de Matemática e jornalista brasileiro. Bacharel em Matemática pela Universidade de Coimbra, lecionou Aritmética, Geometria e Trigonometria quando da criação da Academia Real Militar no Rio de Janeiro. Foi um dos editores do *Astrêa*, periódico publicado à época da crise do Primeiro Reinado, entre 1826 e 1832. É pai do ex-presidente de diversas províncias do Brasil Império Ângelo Tomás do Amaral. Disponível em: [\[http://noticias.wiki.br/nw/Antônio José do Amaral\]](http://noticias.wiki.br/nw/Ant%C3%B4nio_Jos%C3%A9_do_Amaral); acesso em 28 jul 2016.

¹⁴ Francisco Cordeiro da Silva Torres e Alvim (1775 – 1856) foi engenheiro, graduado pela Academia Real dos Guardas-Marinhas de Lisboa, foi professor de álgebra, geometria analítica, cálculo integral, engenharia militar e engenharia civil na Academia Real militar do Rio de Janeiro. Disponível em: [\[https://pt.wikipedia.org/wiki/Francisco Cordeiro da Silva Torres de Sousa Melo e Alvim\]](https://pt.wikipedia.org/wiki/Francisco_Cordeiro_da_Silva_Torres_de_Sousa_Melo_e_Alvim); acesso em 28 jul 2016.

¹⁵ Biografia não encontrada.

¹⁶ Manuel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838) foi um professor, jornalista, militar e político brasileiro. Formou-se em Matemática e trabalhou no Observatório Real da Marinha e foi nomeado, em 1801 professor substituto da Academia dos Guardas-Marinhas, ensinando astronomia teórica e prática. Disponível em: [\[https://pt.wikipedia.org/wiki/Manuel Ferreira de Araújo Guimarães\]](https://pt.wikipedia.org/wiki/Manuel_Ferreira_de_Ara%C3%BAjo_Guimar%C3%A3es); acesso em 28 jul 2016.

A matemática era ensinada quase exclusivamente para uma pequena parte da elite e nobreza, que concluíam o ensino superior nos colégios jesuítas ou em Portugal, e mesmo assim, pouco se aprendia ou ensinava a acerca de matemática. Neste período, não havia universidades no Brasil, no entanto existiam mais de 17 escolas superiores jesuítas em todo o território brasileiro. Apenas oito dos colégios jesuítas ofereciam os cursos de Filosofia ou de Artes, ou seja, em apenas nesses existia algum tipo de ensino de matemática.

Para melhor compreensão sobre os eventos que marcaram o ensino de Matemática no Brasil, é com base na pesquisa realizada por Santos (2015b) que será elaborada uma linha do tempo.

O período abordado inicialmente será o intervalo entre 1549 a 1759, quando os jesuítas ampliaram a rede educacional brasileira, pela fundação de novas escolas de ensino elementar em Porto Seguro e Ilhéus, na Bahia, e em São Vicente e Piratininga e São Paulo, e no Espírito Santo. Apesar do grande acervo sobre a Matemática, os jesuítas não valorizavam estes saberes, posto que a Igreja não via esta área com bons olhos, por considerar tratar-se de uma “ciência vã” (SANTOS, 2015b, p.17, apud MIORIM, 1998, p.82):

O ensino de matemática visa “[...] o desenvolvimento da capacidade de compreensão e de análise das relações quantitativas e espaciais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação exata e profunda do mundo objetivo” (SANTOS, 2015b, apud GOMES, 2012, p.20).

Se detalharmos os avanços do Ensino de Matemática no país, através de uma linha do tempo, a partir de Santos (2015b), teremos que:

1549 - chega ao Brasil um grupo de jesuítas, composto por 6 padres, que eram liderados pelo Pde. Manuel da Nóbrega, com o objetivo de fundar a 1ª. escola para o ensino elementar, na cidade de Salvador (BA), com bases clássica-humanistas, estudo sobre as civilizações humanas e o aprendizado do latim;

1599 - lançado o *Ratio Studiorum* documento pedagógico no qual os jesuítas apresentaram uma grade curricular dos cursos “*studia superiora*” (no presente, ensino superior), contendo as disciplinas a serem ensinadas, priorizando humanidades, retórica e gramática, enquanto que a matemática era ensinada mais superficialmente;

1757 - inauguração da Faculdade de Matemática no Colégio da Bahia, cuja grade curricular incluía as disciplinas de Geometria Euclidiana, perspectiva, Trigonometria, Equações Algébricas, Razão, Proporção e Juros;

1759 - expulsão dos jesuítas de todas as colônias do Brasil, responsáveis pelos 17 colégios e instituições educacionais, a grande maioria fundadas pelos padres católicos, restando apenas algumas escolas, dirigidas por outras ordens religiosas ou instituições militares (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES, 2012, p.14);

1798 - fundação do Seminário de Olinda, pelo Bispo Dom Azevedo Coutinho, este que foi um evento considerado de grande importância para o

Ensino da Matemática no Brasil; esta escola se transformou em uma das melhores secundárias no país, dando relevância aos temas matemáticos e científicos, cujos cursos eram planejados antecipadamente e bem estruturados (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES, 2012, p.14)

1808 - fundação da 1ª faculdade brasileira, a Academia Real Militar, devido à chegada da Corte Portuguesa ao Brasil. Foram oferecidos o curso de Matemática, com duração de 4 anos, sendo que apenas os estudantes de engenharia e artilharia o faziam por inteiro; já o Curso Militar, com duração de 3 anos, cursavam as disciplinas de Matemática Elementar, apenas no 1º. ano. Foi a partir deste momento que o Ensino de Matemática no país começou a ser institucionalizado (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud MOTTA, J., 1976, p. 20, apud, SILVA, 1992);

1822 – Proclamação da Independência do Brasil, e instalação da Assembléia Constituinte;

1824 – Promulgação da 1ª. Assembleia Constituinte e da 1ª. Lei de Instrução Elementar Brasileira, e das primeiras escolas primárias gratuitas;

1827 – promulgação da Lei de 15 de Outubro, instituindo a criação de escolas em todas as cidades e vilas brasileiras. Em agosto deste mesmo ano, foram criadas em Olinda (PE), e São Paulo (Largo São Francisco), as primeiras universidades nacionais;

1837 – o Ministro Bernardo Pereira Vasconcelos, espelhando-se no ensino de colégios franceses, transformou o Seminário de São Joaquim (RJ) no Imperial Colégio Pedro II. A grade curricular era composta de disciplinas clássico-humanistas, mas também foram incluídas outras, entre elas as matemáticas, as línguas modernas, as ciências naturais e físicas e a história; entre as matemáticas, passaram a ser ensinadas a aritmética, geometria e álgebra (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud MIORIM, 1998, p. 87)

1830 – na sequência do Imperial Colégio Dom Pedro II, foram desenvolvidos muitos livros, abrangendo todas as áreas;

1890 – realizada a 1ª. Reforma no Ensino, pelo Ministro da Instrução, Correios e telégrafos, Benjamin Constant Botelho de Magalhães (1837-1891). Esta reforma ocasionou a adoção de um novo currículo, privilegiando o ensino de Ciências e Matemática;

1920 – 2ª. Reforma do Ensino Primário, abrangendo a formação de professores, reforma que ficou conhecida como Escola Nova ou Escola Ativa (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES, 2012, p. 17-18).

1929 – Francisco de Campos (1891 – 1968) promove, em Minas Gerais, outras reformas, que permitiram o surgimento das Escolas de Aperfeiçoamento, no que se refere à formação de docentes do ensino primário, na direção das novas diretrizes pedagógicas da Escola Nova; (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES, 2012, p. 18);

1925–1930 – Professor Euclides Roxo (1890 – 1950), então diretor do Colégio Pedro II, implementou a unificação das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria, generalizando o Ensino de Matemática. Esta ação elevou o ensino da matemática elementar ao ensino gradual da Matemática, estendendo-se pelos 4 anos do curso (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud ROXO apud ROCHA, 2001, p. 33)

1930 – Com a fundação da Universidade de São Paulo (USP), novo avanço significativo ocorreu no Ensino de Matemática, elevando o estado de São Paulo, entre os anos 30 e 50, à categoria de centro intelectual nos estudos matemáticos do país. Na USP nasceu o 1º. Curso de bacharelado em Matemática, permitindo a formação de professores para a Educação Superior no Brasil;

1959 – a Conferência Mundial de Matemática trouxe fortes influências para o ensino dessa disciplina no Brasil, inclusive para a realização do 3º. Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (RJ), ensejando o surgimento do Movimento da Matemática Moderna. Foi uma questão que surgiu no pós-guerra, quando diferentes países, inclusive os Estados

Unidos, perceberam a necessidade de reformulações no ensino da matemática, e uma necessidade premente das grades curriculares (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud ROXO, 2007, p. 21);

1961 – fundação do Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática (GEEM), em São Paulo, que muito colaborou para o treinamento de professores e publicação de livros para que as ideias modernistas sobre o ensino fossem amplamente difundidas (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud FIORENTINI, 1995, p.14)

1961 – 3ª. Reforma do Ensino e promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) – Lei 4024 de 20 de dezembro de 1961, que incluiu o ensino de Matemática em todas as séries do antigo ginásio, em algumas do antigo Colegial, e ainda nos cursos técnicos e normais. Segundo esta lei, as propostas curriculares caberiam aos Conselhos Estaduais de Educação;

1962 – realizado o IV Congresso Brasileiro do ensino da Matemática em Belém (PA), abordando o Movimento da Matemática Moderna no Ensino Secundário, levando ideias do GEEM e sua parceria com a Secretaria da educação do Estado de São Paulo (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud MIORIM 1998, p.114);

1968 - ampliação do total de escolas da rede pública de ensino para o 1º. e 2º. Graus, e intensificação do preparo de professores; evidenciava-se a falta de unidade entre as disciplinas e conteúdos pedagógicos (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud PAVANELLO, 1993, p. 14)

1970 - implantação dos programas de pós-graduação em Matemática, para capacitação profissional (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES 2012, p. 26);

1971 - nova LDB – Lei n. 5.692, que subdividiu o ensino em dois níveis: o 1º. Grau, com duração de oito anos, unificando o primário e o ginásio; e o 2º. Grau, considerado como preparo profissional e capacitação para o Ensino Superior (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES 2012, p. 25);

1987 - criação de cursos específicos de pós-graduação em Educação Matemática (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud GOMES 2012, p. 26);

1996 - nova LDB – Lei n. 9.394, que reformulou a Educação no país, e trouxe mudanças nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), sendo que, no ensino de Matemática, trouxe ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas (SANTOS, 2015b, p.16-23 apud BRASIL, 1997, p. 21).

Ocorreram inúmeros eventos históricos que tiveram influência positiva ou negativa no Ensino de Matemática no Brasil, entre eles alguns que merecem maior destaque, como a expulsão dos jesuítas em 1759, a chegada da família real ao Brasil (1808) e a fundação da Universidade de São Paulo (1930) (BRITO, 2007).

Com relação à expulsão dos jesuítas, ou Reforma Pombalista, ela foi promovida no Brasil colônia pelo então Marques do Pombal. Seu nome de batismo era Sebastião José de Carvalho e Melo (1699-1782). A Igreja detinha grande ascendência sobre a Política, sobre os estudantes e sobre os índios. Ocorre que na Europa, nasceram as ideias sobre o liberalismo, o iluminismo e o desenvolvimento do pensamento científico, ocasionando várias transformações na cultura, ao longo

do século XVIII, que foi considerado o “século das Luzes” (OLIVEIRA, BORGES, BORTOLOSSI et al., 2013).

Figura 02 - Expulsão dos Jesuítas



Fonte: [<http://www.revistadehistoria.com.br/secao/artigos/especial-expulsao-dos-jesuítas-cortados-pela-raiz>]

Tal pensamento promovia a separação entre a fé (religião) e a razão (ciência), isto é, que o homem deixasse de ser guiado pelas crenças, pelas quais existia um único Deus, e que a tudo explicavam, passando a ser guiado pela ciência e tudo aquilo que pudesse ser provado. Na prática, o Iluminismo foi um movimento criado pelos burgueses para dissolver problemas relacionados ao controle do Estado Absolutista, a quem os burgueses não mais queriam sujeitar-se, isto é, “que a política deveria ter como princípio fundamental, o homem e sua liberdade, e não apenas a busca pela igualdade jurídica, política e social” (OLIVEIRA, BORGES, BORTOLOSSI et al., 2013, p.3-5).

Por seu lado, o Marques de Pombal pretendia dominar a política sem a interferência da religião; assim, em determinado momento, resolveu expulsar os jesuítas do país, e com isso, fechou seus estabelecimentos e confiscou seus bens; partiu da premissa de que o governo português começou a perceber que a educação oferecida pelos padres jesuítas interessava mais à própria igreja, do que a Portugal, e de certa forma, não atendia mais seus interesses, colocando em sério

risco o poder da coroa portuguesa, tanto no campo político-ideológico, como no campo comercial.

A saída desses padres fez com que inúmeras escolas (17 colégios em vários locais do Brasil) fechassem as portas, sendo que o ensino precário de matemática deixou de existir por completo. Outras ordens religiosas abriram alguns colégios, como os franciscanos, com o ensino de hebraico, latim, grego, retórica, filosofia, etc. Entretanto, como não existia o ensino de matemática semelhante ao oferecido pelas escolas jesuítas, surgiu uma lacuna que permaneceu por vários anos na história do Brasil. Tal deficiência ocasionou enormes dificuldades até para os estudantes brasileiros que estavam em Portugal, devido à reforma da Universidade de Coimbra, proposta também pelo Marquês de Pombal, que tinha em mente, organizar as escolas para o estado e não para a fé como os jesuítas.

Na prática, Pombal pretendia preparar homens para a Revolução Industrial na Europa, mas a reforma atingiu em cheio os estudantes brasileiros de matemática em Coimbra, e em todo Portugal, os quais não conseguiram validar os seus diplomas por causa das novas regras que não aceitavam o ensino de matemática dos colégios no Brasil. Isto causou transtornos enormes e muitos estudantes em Coimbra pois retornavam ao Brasil após longos anos de estudo sem um diploma reconhecido, tendo que voltar a Portugal e refazer os estudos novamente, perdendo tempo e dinheiro, enquanto aqui no Brasil a falta de professores era grande nesse período, conforme relata Brito (2007).

Por sua vez, a chegada da família Real ao Brasil, em 1808, foi um acontecimento positivo para o Ensino da Matemática, especialmente por ter ocasionado a criação da Academia Real Militar na Corte do Rio de Janeiro. Com a inclusão de matemática no currículo da academia, abriu-se campo de trabalho para os primeiros doutores brasileiros em matemática vindos de Portugal (BRITO, 2007).

A vinda da nobreza para o Brasil Colônia também facilitou o acesso dos estudantes brasileiros às universidades portuguesas; a partir deste momento, cresceu a lista de professores doutores em matemática, permitindo que se constituísse a primeira composição do corpo docente do curso de matemática, todos formados na Universidade de Coimbra: Antônio José do Amaral (1782-1840), Francisco Cordeiro da Silva Torres e Alvin (1775-1856), José Saturnino da Costa

Pereira (1773-1853), José Vitorino dos Santos e Souza (1780-1852) e Manoel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838) (BRITO, 2007).

Outros nomes que não fizeram parte da Academia Real, mas que merecem destaque nesse período foram Thomas Antônio de Oliveira Lobo, natural do Rio de Janeiro e João Antônio Coqueiro (1837-1910), natural de São Luiz, Maranhão autor do livro *O Tratado de Aritmética* (1860) (BRITO, 2007).

O terceiro e último evento fundamental para a efetivação do Ensino de Matemática no Brasil foi a fundação da Universidade de São Paulo (USP), em 1930, firmando-se como pioneira nos estudos das matemáticas, devido à criação do primeiro curso de graduação em Matemática no Brasil, com professores renomados como os italianos Luigi Fantappé (1901-1956) e Giacomo Albanese (1890-1947).

A USP tornou-se o marco inicial e influenciador para outras Universidades brasileiras como a do Rio de Janeiro, Curitiba, Campinas, Brasília e tantas outras que, a partir de então, incluíram licenciatura em matemática em seus currículos.

Como se vê, os caminhos pelos quais o ensino da matemática percorreu durante quase toda a história brasileira foram tortuosos alcançando sucesso apenas da metade do século XX para cá. Poderíamos ter tido avanços maiores não fossem fatores já citados nesta pesquisa que atrasaram o ensino da matemática no Brasil (BRITO, 2007).

2.1. Ensino da Matemática no Ensino Médio

Segundo Lopes (2011, p.3), o Ensino Médio é a última etapa da Educação Básica no Brasil, cujos objetivos são preparar os estudantes para o Ensino Superior, assim como promover a autonomia do estudante, e compreender para poder interagir com a vida prática e exigências do mercado de trabalho.

Para Berti (2005, p.5-6), as grandes revoluções do mundo moderno, “a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789)”, e ainda, diante dos avanços conquistados pelas Ciências e Tecnologias, os especialistas em Educação passaram a preocupar-se mais com as novas necessidades do ensino para os trabalhadores, notadamente a Matemática. Refere que a reforma para o Ensino de Matemática, proposta por Anísio Teixeira ainda nos

anos 30, estava relacionada à realidade da vida prática dos indivíduos; nessa medida, os problemas deveriam ser propostos de uma forma que levassem os educandos a se interessarem tanto pelo enunciado do problema, quanto pela identificação das soluções para que pudessem ser resolvidos.

Como mencionado na linha do tempo do início deste capítulo, sobre a evolução do Ensino da Matemática, Berti (2005, p.7) refere que o primeiro grande nome brasileiro foi o Professor Euclides Roxo, que promoveu em 1927, a unificação da Matemática, reunindo assim, o ensino de aritmética, álgebra e geometria. Esta proposta foi influenciada pela unificação feita nos Estados Unidos, promovida por Ernest Breslich. À época, o Professor Roxo contou com o apoio do Departamento Nacional de Ensino (DNE) e da Associação Brasileira de Educação (ABE).

No presente, Godoy (2010, p. 81) explica que o ensino de Matemática para esta etapa da formação estudantil tem os seguintes objetivos:

- a) Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- b) aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
- c) desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- d) expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- e) estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo.

Godoy (2010, p.78) defende ainda que a proposta do ensino de Matemática até os anos 70 pretendia proporcionar “um ensino de funções baseada em situações cotidianas, ou seja, eram colocadas situações do dia a dia para que o aluno fosse estabelecendo as relações que visavam propiciar uma melhor compreensão do conceito de função”.

Já a partir dos anos 80, a Equipe Técnica de Matemática, da Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), promoveu a inclusão do ensino de Matemática nos currículos escolares, com base em duas linhas de ensino:

a necessidade de desenvolver atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade e o desenvolvimento do raciocínio lógico, da capacidade de abstrair, generalizar e conjecturar. A Matemática tinha dupla função: aplicações práticas e o desenvolvimento do raciocínio. Esses dois aspectos são, de fato, componentes básicos indispensáveis na prefiguração de um currículo, não sendo, no entanto, qualquer um deles suficiente para caracterizar o papel a ser desempenhado pela Matemática (GODOY, 2010, p.78).

Godoy (2010, p.80) destaca também que:

a Matemática, por sua universalidade de quantificação e de expressão como linguagem, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Porém não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental; possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis existirem.

A Matemática como ciência, com seus processos de construção, validação de conceitos e argumentações, e os procedimentos que visam generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações.

No que se refere à formação docente, Carneiro (2008, p.5) refere FOUCAULT, (1995) defende que “a Educação Matemática pode ser vista “como uma posição de locução, como um lugar onde o sujeito, professor, obtém e legitima seu discurso, ocupando posição de fala e produção, vencendo os estereótipos de professor semiprofissional, mero reproduzidor das propostas alheias.” Equivale a dizer que a profissionalização do professor se refere como “cuidado consigo mesmo”. Ainda com base nas teorias defendidas por Foucault, Carneiro prossegue explicando que existem discursos sobre os índices que demonstram baixo aproveitamento dos alunos, que responsabilizam os professores, enquanto existem outros, que demonstram que, para a sociedade moderna, os saberes matemáticos são vistos como algo de difícil aprendizagem, e que, portanto, aqueles que os dominam, desfrutam de um certo *status*, como alguém talentoso, no contexto atual.

Neste sentido, Carneiro (2008, p.5) explica ainda que, nesta perspectiva, o professor de Matemática precisa deter saberes técnicos, assim como os tecnológicos, e dessa forma, precisa conduzir seus alunos a aprenderem “a ligação entre o raciocínio lógico dedutivo e o domínio da máquina”. Portanto, esse novo

professor de Matemática precisa “ter domínio dos saberes pedagógicos dos conteúdos específicos, dominar a máquina, e ainda, o recurso didático e as ferramentas obrigatórias, que permitirão à escola ser reconhecida e valorizada por sua qualidade”.

Gomes (2012, p.27) ensina que desde os anos 70, as pesquisas acadêmicas sobre a Educação Matemática no Brasil demonstram a importância da inclusão de determinados elementos, que devem ser comuns entre as práticas pedagógicas escolares; a autora se refere aos jogos e materiais concretos, e ainda o ensino da História da Matemática, para permitir que exista um significado prático na vida dos estudantes, de modo a levá-los a interessar-se pela Matemática.

Já Miguel, Garnica, Igliori e D’Ambrósio (2004, p.71-2), referem que as pesquisas sobre a relevância a Educação matemática surgiu a partir de nomes importantes, entre eles o norte-americano Eliakim H. Moore (1862-1932), quando propõe a integração do ensino de matemática e física, ensejando o despertar do espírito de pesquisa; por sua vez, os autores referem o matemático alemão Felix Klein (1849-1925), e seu livro intitulado “*Matemática elementar de um ponto de vista avançado*”, para quem “o professor deve, por assim dizer, ser um diplomata, levando em conta o processo psíquico do aluno, para poder agarrar seu interesse. Afirma que o professor só terá sucesso se apresentar as coisas de uma forma intuitivamente compreensível”. Assim surgiu a Educação Matemática, dentro da formação docente de Matemática uma vez que vincula a “matemática e da educação, de natureza interdisciplinar”; isto se deu a partir da fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, em 1908.

2.2. A História da E.E.E.F.M. 28 de Novembro

A escola foi criada em agosto de 1982, recebendo o nome de Escola Estadual de 1º. e 2º. graus 28 de Novembro. O nome foi atribuído ao fato de ter sido nesta data em que se daria a emancipação política do município de Ouro Preto do Oeste, sendo então seu administrador o senhor Ailton Casales Teixeira (PPP, 2015).

Sua criação foi oficializada pelo Decreto n. 494, de 24 de setembro de 1982, Ato de reconhecimento 081/CEE-RO, de 28/08/91. Está situada à Rua Olavo Bilac, n. 887, no bairro União, na cidade de Ouro Preto do Oeste. Desde a sua criação, e até os dias atuais, passou por várias alterações em sua estrutura física. A parte de madeira das salas foi substituída por alvenaria, foi construído o refeitório, a quadra esportiva coberta, rampas de acessibilidade, passarelas, salas de apoio didático-pedagógico e climatização de todos os ambientes da escola. Também foi construído um prédio anexo, através do Projeto Alvorada do Governo Federal, com mobiliário próprio onde funciona a Biblioteca “Rui Barbosa”; nesse prédio funciona também o laboratório de informática, o laboratório de Ciências, laboratório de Matemática. Ocupa uma área de 16.662,70 m² (PPP, 2015).

Na década de 80, quando foi fundada, contava com as modalidades de Ensino Fundamental de 1^a. a 4^a. séries, de 5^a. a 8^a. séries e cursos profissionalizantes em Magistério, que contou com sua última turma no ano de 1988, enquanto o Curso Técnico em Contabilidade foi ofertado até o ano de 1999. Paralelamente aos cursos profissionalizantes, era ofertado também o Ensino Básico, que posteriormente passou a se chamar Colegial, e mais atualmente, Ensino Médio (PPP, 2015).

Em 1998, obedecendo à LDB nº. 9394/96, passou a ser denominada “Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio 28 de Novembro”, através do Decreto de Denominação nº. 8.367/98 (PPP, 2015).

O Ensino Fundamental, que antes era ofertado com a duração de 8 anos, foi modificado a partir de 2008, quando passou a ser de 9 anos, conforme a Lei nº. 11.274 de 06 de fevereiro de 2006. A referida lei vem alterar a redação dos artigos 29, 30, 32 e 87 da Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, artigos esses que dispõem sobre a duração de 9 (nove) anos para o Ensino Fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 (seis) anos de idade (PPP, 2015).

Conforme o Art. 23 da LDB nº. 9.394/96, o Ensino Fundamental passou, então, a ser composto desde os anos iniciais até os anos finais, das seguintes séries: 1º. Ano; 2º. Ano; 3º. Ano; 4º. Ano; 5º. Ano; 6º. Ano; 7º. Ano; 8º. Ano; 9º. Ano. No início de 2012, a Escola EEFM 28 de Novembro deu início ao reordenamento gradativo do Ensino Fundamental de 1º. ao 5º. ano, permitindo que a escola se

tornasse um espaço exclusivo para os estudantes do 6º. ao 9º. ano e Ensino Médio, com o objetivo de assegurar-lhes maiores oportunidades de aprendizagem, com mais qualidade e convívio escolar (PPP, 2015).

Amparada pela Portaria 971, de 09 de outubro de 2009, e inspirada nas orientações do programa federal, em 2013 a EEEFM 28 de Novembro começou a ofertar a educação em tempo integral, segundo o Programa Ensino Médio Inovador / PROEMI, e em 2014 iniciou-se também o Programa Mais Educação, com proposta de elaboração do currículo decorrente do percurso formativo organizado pela escola, apoiado na participação coletiva em teorias educacionais, seguindo a legislação em vigor, as Diretrizes Curriculares Nacionais, assim como a do Sistema Estadual de Ensino, bem como orientação metodológica estabelecida pelo Programa do MEC (PPP, 2015).

Ela oferece atualmente a Educação Básica nas seguintes etapas e modalidades de Ensino (PPP, 2015):

- a) Ensino Fundamental do 6º. ao 9º. anos e Ensino Médio do 1º. ao 3º. anos, regular/presencial, com jornada escolar de, no mínimo, quatro horas de trabalho efetivo em sala de aula, carga horária mínima de 840 (oitocentas e quarenta) horas, distribuídas por um mínimo de duzentos dias de efetivo trabalho escolar;
- b) Classe de Aceleração da Aprendizagem – CAA (Fundação Roberto Marinho) - Projeto Salto, para alunos com defasagem/distorção de idade ano, do 6º. ao 9º. ano do Ensino Fundamental; organizada em regime de funcionamento presencial, com duração mínima de 1.640 (hum mil e sessenta e quarenta) horas de efetivo trabalho escolar, a serem cumpridas em 24 meses ou dois anos letivos, com frequência mínima de 75% do total de dias e horas de atividades escolares programadas, e exigência de sequência escolar para o ingresso e/ou continuidade de estudos;
- c) Educação Especial de Forma Inclusiva, perante a qual o estudante com Necessidades Educacionais Especiais é atendido em salas comuns, objetivando a sua inclusão social e educacional, com a observância das normas de ensino específicas vigentes e com o apoio e acompanhamento

da Sala de Recurso Multifuncional, garantindo a essa clientela acesso contínuo ao espaço comum da vida em sociedade.

A escola conta com 114 funcionários, sendo que 81 destes atuam no apoio técnico e suporte pedagógico, e ainda com 33 professores, dois quais 5 ensinam a disciplina de Matemática, os quais coordenam, juntamente com os professores de áreas afins, uma oficina científica, envolvendo as Ciências Exatas e suas Tecnologias, realizada pelos alunos no 2º. bimestre de cada ano letivo; no Laboratório de Matemática, são realizadas também atividades específicas desta disciplina, já que este novo espaço foi implantado no último mês de maio (PPP, 2015).

Desenvolve ainda, anualmente, oficinas temáticas e feiras científicas em todas as áreas. Em 2015 foi realizada, no mês de setembro, uma oficina envolvendo Geometria. Já neste ano de 2016, aconteceu no 2º. Bimestre, incluídas as disciplinas de Matemática, Química e Física.

No laboratório de Matemática são realizadas aulas práticas, de forma lúdica, projeto no qual todos os professores estão engajados, visando desenvolver habilidades e o interesse dos educandos.

O ensino de Matemática na E.E.E.F.M. 28 de Novembro tem passado por aperfeiçoamento ao longo de cada ano, com o propósito de tornar o ensino matemático mais significativo e contextualizado, com situações do dia a dia, para alcançar os objetivos propostos dentro do currículo; tem-se realizados projetos e oficinas temáticas com os alunos do Ensino Fundamental e Médio, e para melhoria do mesmo, a escola, juntamente com os professores, tem construído vários objetos como teodolito, quebra-cabeça com o teorema de Pitágoras, geoplano, circunferências trigonométricas construídas com madeirite e adesivos.

Depois dessas ideias todas, a pedido dos professores de Matemática, a escola organizou um espaço para o laboratório de Matemática, adquirindo os materiais necessários para que os diferentes temas matemáticos fossem trabalhados, em todos os seguimentos. Assim, estão disponíveis atualmente neste laboratório, diferentes recursos, como as multimídias e softwares matemáticos.

2.2.1. O Ensino da Matemática na E.E.E.F.M. 28 de Novembro

Concebe-se que a função da instituição educacional é garantir o processo de transmissão, sistematização e assimilação dos conhecimentos, produzida historicamente pela humanidade, de modo que os seres humanos possam interagir na sociedade de forma consciente.

Os conhecimentos da Matemática constituem um patrimônio da humanidade. Um patrimônio sociocultural, que possui dimensões universais, com significados e abrangências representativas no mundo da Matemática, podendo ser usufruída pela sociedade. Neste sentido, os valores promovidos pelo ensino da Matemática nas escolas constituem um patrimônio cultural que deve ser socializado com as novas gerações, independentemente da classe social, raça, faixa etária, crença religiosa, convicção ideológica ou sexo.

Os conhecimentos apropriados pelo aluno, a partir do ensino da Matemática, permitem compreender melhor como chegamos aos conhecimentos atuais, e os motivos pelos quais são ensinados este ou aquele assunto.

Com uma perspectiva crítica, e um olhar diferenciado para a Matemática que é ensinada atualmente, é que nós, os professores da Escola 28 de Novembro, nos propomos a trabalhar o ensino desta importante disciplina. Digo que nos propomos, pois nem sempre as coisas ocorrem da forma como queremos ou planejamos. São diversas as variáveis que interferem em nossos resultados.

Sabemos que ensinar Matemática consiste em criarmos as condições favoráveis à produção de conhecimento pelos estudantes. E, para que realmente haja ensino e aprendizagem, é necessário que o saber seja um objeto importante e essencial ao longo das interações entre o educador e o educando, e que esse saber seja importante para a escola, como um todo.

Compreendemos que as atividades devem ser concebidas considerando as recomendações dos PCNs, das propostas curriculares e também os resultados de resoluções e pesquisas sobre o tema em questão. As tarefas devem permitir aos alunos que desenvolvam certas competências e habilidades e precisam ter,

essencialmente, dois objetivos claros: auxiliá-los na construção de conhecimentos e saberes, de maneira construtiva e significativa, e ainda, no desenvolvimento de certas habilidades. Por exemplo, saber ler, interpretar e utilizar as diferentes representações matemáticas, bem como desenvolver o raciocínio dedutivo.

Não raramente, nos deparamos com situações nas quais os alunos não possuem os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento da proposta atual. A falta de letramento dos mesmos é uma delas. Assim nos vemos numa situação de conflito, e muitas vezes somos compelidos a mudar nossas estratégias, alterando assim o resultado anteriormente planejado e previsto.

Nós, professores de Matemática desta escola, formamos um grupo, que já está junto a muito tempo, portanto, temos facilidade em driblar esses pormenores, sempre um ajudando o outro. Participamos sempre de formação continuada e procuramos desenvolver estratégias que visam atender às necessidades de nossos educandos.

Ensinaamos, na maioria do tempo, a Matemática de forma contextualizada, e isso favorece uma ligação entre o conhecimento obtido em sala de aula com a realidade do estudante. Sabemos que numa sociedade em permanente mudança como a nossa, os currículos devem ser revistos com frequência, adaptando-se às novas necessidades dos estudantes.

Para isso, contamos com uma boa estrutura física, apoio pedagógico, e com o desenvolvimento das novas tecnologias, em particular da Internet, como é o caso do laboratório de informática e, mais especificamente, do laboratório com materiais para o ensino da Matemática. Ambos oferecem um grande número de possibilidades de desenvolvimento curricular, bastando, portanto, sabemos bem aproveitar.

Em nossas aulas, os conteúdos são vistos nos livros didáticos, usados pela maioria dos professores. Entretanto, durante todo o ano letivo, implementamos projetos que nos oportunizam expor os diferentes conteúdos de forma diferenciada, possibilitando que os alunos tenham acesso a uma vasta pesquisa sobre os assuntos tratados.

Cada professor tem, então, procedimentos próprios de ensino e de avaliação. Contudo, os pilares orientadores para os diferentes métodos são os mesmos.

Observamos, contudo, que, apesar do comprometimento dos professores desta escola, a Matemática ainda é a matéria que mais elimina e exclui qualquer indivíduo dos concursos e vestibulares. Diante desta problemática, voltamos a afirmar que se faz necessária uma drástica revisão do ensino nas séries iniciais.

3. TEORIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

3.1. Princípio Multiplicativo

O Princípio Multiplicativo consiste em levar o aluno ao raciocínio multiplicativo. Por meio de uma situação-problema de contagem, este princípio vem acompanhado de situação do tipo “se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os objetos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?” (BRASIL, 1998, p.137).

Portanto, a exploração desses problemas de contagem pode direcionar o aluno, desde cedo, a fazer uso de representações (diagramas de árvores, tabelas, desenhos, esquemas, etc.) como técnicas de resoluções.

Morgado et al. (1991, p.17) destacam em seu livro que, “a primeira técnica matemática aprendida por uma criança é contar, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem.”

A técnica a seguir mostra, de modo simples e prático, as possibilidades de escolha: quatro cadeiras, a princípio vazias, sendo ocupadas por pessoas que chegam uma após a outra. A primeira pessoa a sentar terá quatro opções de escolha; a segunda, três; a terceira, duas; a quarta, uma.

Este é um exemplo pequeno, com quatro cadeiras. Só multiplicar o número de opções de cada pessoa: $4 \times 3 \times 2 \times 1$. O produto da multiplicação será o número 24. No caso de aumentarmos o número de cadeiras, o resultado do produto de números de opções de cada pessoa é alterado consideravelmente.

Vejamos o exemplo anterior agora com 5 cadeiras: $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
E com 6 cadeiras: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

E assim por diante. Observa-se que uma cadeira a mais ou a menos eleva ou diminui grandemente o produto. Portanto, com 4 cadeiras, resultado 24; com 5 cadeiras, resultado 120; com 6 cadeiras, resultado 720; com 7 cadeiras, resultado 5.040; com 12 cadeiras, resultado 479.001.600.

Esta técnica poderá ser aplicada com outros tipos de conjuntos, ou com palavras, por exemplo, com significados ou não, Vejamos as possibilidades que podem ser formadas a partir da palavra PAI: PAI, PIA, API, AIP, IAP, IPA.

Em qualquer ramo de atuação, a contagem faz parte do cotidiano das pessoas, mas o fato é que, contar, não é sempre um processo simples. Em muitas situações, contar unidades uma a uma, que é o processo elementar, mostra-se algo inviável, e então é necessário estabelecer métodos de contagem que permitam chegar aos resultados mais rapidamente. Obter esses métodos é o objetivo da Análise Combinatória.

3.2. Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo da Contagem

A análise combinatória é alicerçada no Princípio Fundamental da Contagem, também conhecida como Princípio Multiplicativo da Contagem.

Se um experimento é composto de duas etapas sucessivas e independentes, de tal maneira que o número de possibilidades na 1ª. etapa é m , e para cada possibilidade da 1ª. etapa o número de possibilidades na 2ª etapa é n ; então, o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \times n$.

O princípio fundamental da contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1 , há y modos de tomar a decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy . (MORGADO, 2013, p.18).

Exemplo 3.2.1 - Uma pessoa possui cinco peças de calça, 3 camisas e 2 pares de sapatos. A pergunta é: de quantos modos ela pode se vestir para ir a uma festa?

Solução: Para formar um conjunto com uma calça, uma camiseta e um par de sapatos, equivale a tomar as seguintes decisões:

D_1 : Escolha da calça (5 modos);

D_2 : Escolha da camiseta (3 modos);

D_3 : Escolha do par de sapatos (2 modos);

Portanto, existem $5 \times 3 \times 2 = 30$ modos de se vestir

Exemplo 3.2.2 - Quantos são os números de três dígitos distintos que podemos formar com os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 ? (DANTE, 2013).

Solução: Há 7 modos para a escolha do primeiro dígito, pois ele não pode ser igual a 0.

O segundo dígito pode ser escolhido de 7 modos, pois ele não pode ser igual ao primeiro dígito.

O terceiro dígito poder ser escolhido de 6 modos, pois ele não pode ser igual ao primeiro nem igual ao segundo dígito.

Dessa forma, teremos: $7 \times 7 \times 6 = 294$ números de três dígitos.

Exemplo 3.2.3 - Quantos são os números pares de três algarismos distintos?

Solução: Para a escolha do algarismo das unidades temos 5 modos (0, 2, 4, 6, ou 8).

Para a escolha do algarismo das centenas devemos prestar atenção em qual foi a escolha para a unidade.

Se não tivermos escolhido o 0, teremos 8 opções de escolha para as centenas, pois não poderemos usar o 0 nem o algarismo usado na ordem das unidades.

Se tivermos usado o 0, teremos 9 opções de escolha para as centenas, pois apenas o 0 não pode ser usado na ordem da centena.

Para a escolha do algarismo das dezenas, teremos 8 opções de escolha, pois não podemos escolher o algarismo que foi escolhido para as unidades e nem o algarismo que foi escolhido para as centenas.

Para a escolha dos números terminados em 0, temos $9 \times 8 \times 1 = 72$ números.

Para os números que não terminam em 0, temos 4 opções de escolha para as unidades, 8 opções de escolha para a ordem da dezena e 8 opções de escolha para a ordem da centena. Desta forma, existem $8 \times 8 \times 4 = 256$ escolhas.

Portanto, teremos $72 + 256 = 328$ números.

Exemplo 3.2.4 – Se lançarmos uma moeda e um dado simultaneamente, pergunta-se: Quais são os possíveis resultados que podem sair?

Solução: Ao jogar uma moeda, pode-se obter K (cara) ou C (coroa), permitindo que ocorra: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Assim, teremos: $2 \times 6 = 12$ resultados possíveis, que são: C1, C2, C3, C4, C5, C6, K1, K2, K3, K4, K5 e K6, totalizando 12 possibilidades de resultados.

Observe que o evento tem duas etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \times 6 = 12$).

Exemplo 3.2.5. De quantos modos podemos colocar 8 torres iguais em um tabuleiro 8×8 , para que não haja duas torres na mesma linha ou na mesma coluna? E se as torres fossem diferentes? (LIMA, 2010).

Solução: Como será preciso colocar apenas uma torre em cada linha, teremos que:

- 1) a que ficará na primeira linha poderá ser colocada de 8 maneiras diferentes;
- 2) a que ficará na segunda linha, de 7 maneiras diferentes, sendo que não pode ficar na mesma coluna na qual ficou a anterior e assim sucessivamente.

Logo, teremos: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320$.

Se forem diferentes, deveremos escolher onde será colocada na primeira linha (8 maneiras) e em seguida escolher onde colocar na primeira linha (8 maneiras).

De acordo com essa lógica, existem $8 \times 8 = 64$ maneiras de colocar a torre na primeira linha.

Analogamente, há $7 \times 7 = 49$ maneiras, de colocar a torre na segunda linha e assim sucessivamente.

Logo, teremos: $64 \times 49 \times 36 \times 25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1 = 1.625.702.400$.

3.3. Permutação Simples e Fatorial de um Número Natural

Permutar é sinônimo de trocar, intuitivamente, nos problemas de contagem, devemos associar a permutação à noção de embaralhar, de trocar objetos de posição (DANTE, 2013).

Se tivermos n elementos distintos, quantas filas podemos formar? A escolha do elemento que ocupará o primeiro lugar pode ser feita de n maneiras; a escolha do elemento que ocupará o segundo lugar pode ser feita de $n - 1$ maneiras; a escolha do elemento que ocupará o terceiro lugar pode ser feita de $n - 2$ maneiras, etc.; a escolha do elemento que ocupará o último lugar pode ser feita de uma

maneira. Prosseguindo dessa forma e usando o Princípio Multiplicativo, fica claro que o número de agrupamentos ordenados que se pode obter com todos esses n elementos é dado por: “ $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ ” (DANTE, 2013).

Esses agrupamentos ordenados recebem o nome de **permutações simples**, e devem ser indicados por “ P_n ”, que é o número de permutações simples de n elementos: $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. O valor obtido com P_n também recebe o nome fatorial do número natural n e representado por $n!$ (lê-se “fatorial de n ” ou “ n fatorial”) (DANTE, 2013).

Então: $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, para $n \geq 1$.

- ✓ Se $n = 1, 1! = 1$
- ✓ Se $n = 0, 0! = 1$
- ✓ $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- ✓ $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

Exemplo 3.3.1 - Quantos são os anagramas existentes na palavra “amigo”? Quantos começam com vogais?

Solução: Cada anagrama corresponde a uma ordem de agrupamento das 5 letras. O número de anagramas é: “ $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ”

Para escrever um anagrama que comece com vogal, devemos primeiramente escolher a vogal (3 modos) e, depois, agrupar as 4 letras restantes; em seguida à vogal ($4! = 24$ modos).

Como há 3 vogais, então teremos $3 \times 24 = 72$ anagramas começados por vogal.

Exemplo 3.3.2 - Quantos números naturais de algarismos distintos entre 4.000 e 10.000 podemos formar com os algarismos 1, 2, 4, 6 e 7 ? (DANTE, 2013)

Solução: Para a ordem da unidade de milhar temos 3 opções de escolha: 4, 6 e 7; para a ordem da centena, como temos 5 algarismos e já escolhemos um para a unidade de milhar então ficamos com 4 opções de escolha, para a dezena 3 opções de escolha e para a unidade 2 opções de escolha.

Logo, teremos $3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$ números.

Exemplo 3.3.3 - Quantas são as palavras (com significado ou não) de 3 letras que podemos formar com as letras A, P, I ? Quais são essas palavras?

Solução: Considerando as três letras A, P e I, existem 3 possibilidades para a primeira posição, 2 possibilidades para a segunda posição e uma possibilidade para a terceira posição.

Logo, de acordo com o Princípio Fundamental da Contagem, temos 6 possibilidades ($3 \times 2 \times 1 = 6$), mostrando as palavras temos: PAI, PIA, AIP, API, IAP e IPA. 6 palavras.

3.4. Permutação com Elementos Repetidos

Em vários cálculos combinatórios, temos que calcular o número de permutações de n elementos, nem todos distintos. Para entender esse tipo de cálculo, devemos observar: De quantas maneiras podemos agrupar as letras da palavra **BALA**?

Se as quatro letras que compõem essa palavra fossem diferentes, teríamos **4! anagramas**. Mas a palavra não se altera quando permutamos as letras iguais; por isso, concluímos que o número de anagramas dessa palavra é menor que 4! (PAIVA, 2013).

Se os **As** fossem diferentes, teríamos as letras B, A₁, A₂, L, e o total de anagramas seria " $P_4 = 4!$ " (DANTE, 2013).

Mas as permutações entre os **2 As** não produzirão novo anagrama. Sendo assim, precisamos dividir " P_4 por P_2 ".

Portanto, o número de anagramas da palavra **BALA** é: " $\frac{P_4}{P_2} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 12$ "

A permutação de n elementos dos quais α é de um tipo, β é de outro tipo e θ é de outro tipo, com $\alpha + \beta + \theta = n$, é dada por: $P_n^{\alpha, \beta, \theta} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \theta!}$.

Exemplo 3.4.1 - Quantos e quais são os anagramas da palavra PAPA?

Para escrever um anagrama da palavra "PAPA" deveremos colocar todas as letras em 4 lugares, e escolher 2 lugares para as letras A e dois lugares para as

letras P, o que pode ser feito da seguinte maneira: PAPA, PAAP, PPAA, AAPP, APPA, APAP (DANTE, 2013).

Como são 4 letras o valor de n é 4. Dois A repetidos e dois P repetidos o valor de $\alpha = 2$ e $\beta = 2$. Portanto, teremos: $P_n^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!} = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = \frac{12}{2} = 6$

3.5. Arranjos Simples

Com elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, vamos formar todas as sequências possíveis de três elementos:

- ✓ (a, b, c) (a, b, d) (a, c, d) (a, c, b) (a, d, b) (a, d, c) (b, c, d) (b, d, c);
- ✓ (b, a, c) (b, a, d) (b, d, a) (b, c, a) (c, a, d) (c, b, d) (c, d, a) (c, d, b);
- ✓ (c, a, b) (c, b, a) (d, a, c) (d, c, a) (d, b, c) (d, c, b) (d, a, b) (d, b, a).

Essas sequências são chamadas de **arranjos simples** dos quatro elementos do conjunto I , tomados três a três. De outra forma, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer sequência formada por três elementos distintos de I . Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam pela ordem dos elementos ou pela natureza dos elementos que os compõem:

- ✓ (a, b, c) \neq (b, c, a), pois diferem pela ordem dos elementos;
- ✓ (a, b, c) \neq (a, b, d), pois diferem pela natureza dos elementos (elementos diferentes).

Segundo Paiva (2013), se contadas as sequências acima, constatamos que o número de arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três é 24. Indicamos esse fato por $A_{4,3} = 24$. Esse número pode ser calculado pelo Princípio Fundamental da Contagem.

Para calcularmos o número total desses agrupamentos de n elementos arranjados p a p , com $n \geq p$, ou seja, como calcular $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo de n elementos tomados p a p).

Para $n = p$, temos $A_{n,n} = P_n = n!$

Para $n > p$, temos n elementos distintos e vamos arranjá-los p a p . Construindo a árvore de possibilidades, obtemos:

1. **na primeira posição:** n possibilidades (pois temos n elementos disponíveis)
2. **na segunda posição:** $(n - 1)$ possibilidades (pois temos $(n - 1)$ elementos disponíveis)
3. **na terceira posição:** $(n - 2)$ possibilidades (pois temos $(n - 2)$ elementos disponíveis)
4. **na p -ésima posição:** $n - (p - 1)$ possibilidades (pois temos $n - (p - 1)$ elementos disponíveis).

Aplicando o Princípio Fundamental da Contagem, temos que o número total de possibilidades é dado por (DANTE, 2013):

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot [n - (p - 1)]}{p \text{ fatores}}$$

Podemos ainda indicar $A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$

Multiplicando esse número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$\begin{aligned} A_{n,p} &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!} \\ &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p)!}{(n - p)!} = \frac{n!}{(n - p)!} \end{aligned}$$

Como $n > p$, multiplicar um número por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ Significa multiplicar por 1; logo, seu valor não se altera.

$$\text{Portanto: } A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 3.5.1 Considerando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, quantos números de 3 algarismos distintos podemos escrever?

$$A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$$

Exemplo 3.5.2 Considerando o exemplo 3.7.1, quantos números de 7 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 5 e 6 sempre juntos e nessa ordem?

Solução: O número procurado tem 7 ordens para ser preenchida com 9 algarismos, e duas dessas serão preenchidas com 56 sendo 6 posições diferentes, restando 7 algarismos para 5 ordens, então teremos arranjo simples de 7 tomado 5 a 5.

$${}_7A_{7,5} = 6 \frac{7!}{(7-5)!} = 6 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 15.120$$

3.6. Combinação Simples

Nos problemas de contagem, o conceito de combinação está intuitivamente associado à noção de escolher subconjuntos: De quantas maneiras podemos escolher p elementos distintos entre n elementos distintos dados?

Para Dante (2013), cada escolha de p elemento é chamada de uma combinação simples de classe p dos n elementos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos elementos a, b, c, d, e são $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$ e $\{c, d, e\}$.

Representamos o número de combinações simples de classe p de n elementos por $C_{n,p}$, C_p^n ou $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = 10$.

Neste mês de outubro acontecerão os jogos intercalasse, e o 2º ano A vai participar na modalidade vôlei de areia. Se dispusermos de 4 alunas: Ana, Bruna, Camila e Gabriela, para formar a equipe composta de duas atletas, como resolver o seguinte problema: Quantas e quais são as possibilidades de formar essa equipe?

Representando Ana, Bruna, Camila e Gabriela por A, B, C e G, respectivamente, temos o seguinte diagrama:

A	B	AB
	C	AC
	G	AG
B	A	BA
	C	BC
	G	BG
C	A	CA
	B	CB
	G	CG
G	A	GA
	B	GB
	C	GC

AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DC, DB

Observando o diagrama, notamos que existem 12 possibilidades. No entanto, se considerarmos todas as possibilidades dessa forma, estaremos contando duas vezes a mesma equipe, ou seja: AB e BA, AC e CA, AD e DA, BC e CB, BD e DB, CD e DC.

Nesses casos, a ordem como as alunas formam os pares a que pertencerão não importa, pois AB e BA, por exemplo, correspondem à mesma equipe.

Assim, as equipes correspondem a subconjuntos de 2 elementos de um conjunto de 4 elementos.

Cada agrupamento obtido dessa forma recebe o nome de Combinações Simples. Nessa situação, temos uma combinação de 4 elementos tomados 2 a 2.

Representando por subconjuntos de 2 elementos as combinações formadas com 2 elementos do conjunto {A, B, C, D}, temos:

$$\{A,B\}, \{A,C\}, \{A,D\}, \{B,C\}, \{B,D\}, \{C,D\}$$

O número total de combinações é 6, e representamos por $C_{4,2} = 6$.

Logo, teremos 6 possibilidades para formar a equipe.

Chama-se Combinação Simples de n elementos distintos tomados p a p ($n \geq p$) todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos escolhidos entre os n elementos dados.

Indica-se o número total de combinações simples por $C_{n,p}$, C_p^n ou $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 3.6.1- Em uma prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 8 questões. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 8 questões? (DANTE, 2013).

$$C_{10,8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!} = 45$$

Exemplo 3.6.2 - Dez cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados, de modo que só é possível abrir a todos, se houver pelo menos 5 cientistas presentes (LIMA, 2010). Nesta situação, pergunta-se:

- a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?
- b) Na situação do item (a), quantas chaves cada cientista deve ter?
- c) De acordo com o enunciado do problema, para cada grupo de 3 cientistas do projeto, existe um cadeado, de modo que nenhum deles possui a chave. Portanto, o número de cadeados tem que ser, no mínimo, igual ao número de maneiras de escolher 3 cientistas dentre os 10 participantes do projeto, isto é, o número de cadeados é no mínimo igual a $C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$.
- d) Seja **A** um dos cientistas do projeto. Uma vez que, para qualquer grupo de 3 cientistas, selecionados entre os 9 restantes, existe um cadeado para o qual **A** possui a chave, então **A** possui $C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = 84$ chaves. De maneira análoga, concluímos que cada cientista tem 84 chaves.

Exemplo 3.6.3 - De quantas maneiras podemos colocar 10 bolas em 3 urnas, de modo que: fiquem 2 bolas na primeira urna, 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira? (DANTE, 2013).

Solução: Há $C_{10,2}$ maneiras de escolher as 2 bolas que ficarão na primeira urna.

Para cada maneira há $C_{8,3}$ possibilidades de escolher as 3 bolas que ficarão na segunda urna. De acordo com o Princípio Fundamental da Contagem há, então, $C_{10,2} \cdot C_{8,3}$ maneiras de distribuir as 2 bolas na primeira urna, e as 3 bolas na segunda urna.

Para cada uma dessas possibilidades, há $C_{5,5}$ maneiras de colocar as 5 bolas na terceira urna. Portanto, seguindo-se mais uma vez o Princípio Fundamental da Contagem, pode-se verificar que existem $C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5}$ maneiras distintas de colocar as 2 bolas na primeira urna, as 3 bolas na segunda urna e 5 bolas na terceira urna.

1ª urna	2ª urna	3ª urna
2 bolas em 10	3 bolas em 8	5 bolas em 5

$$C_{10,2} \cdot C_{8,3} \cdot C_{5,5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 1 \cdot 8!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{5! \cdot 0!} = 45 \cdot 56 \cdot 1 = 2.520$$

Portanto, existem 2.520 possibilidades de fazer essa distribuição.

3.7. Número Binomial

Por definição, o número da forma $\binom{n}{k}$ chama-se Número Binomial, com n e p naturais, $n \geq p$, tal que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (n é o numerador e p é a classe do número binomial). Note que $\binom{n}{k} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 3.7.1 - $\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 2772$.

Números binominais com denominadores iguais a zero, com numerador e denominador iguais, terão como resultado sempre o número um.

Binominais que tem denominador um o resultado será sempre o numerador.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

3.7.1. Propriedades do Número Binomial

Podemos observar que o número $\binom{n}{p}$ é natural e representa combinações simples com todas as propriedades dos números naturais.

Os números $C_{n,p} = \binom{n}{p}$ possuem importantes propriedades, podendo ser provadas de diversas formas, como por exemplo, através da relação: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Em outros casos, podem ser provadas segundo o raciocínio combinatório. Seguem algumas demonstrações destas propriedades.

Sejam n e p números naturais quaisquer, tal que $0 \leq p \leq n$, temos as seguintes propriedades para os números binominais, como se apresentam nas situações 1, 2, 3 e 4.

Situação 1 - $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Demonstração: Como $C_{n,p} = \binom{n}{p}$, que tem por definição, $C_{n,p}$, tem-se que este é o número de subconjuntos com p elementos do conjunto $E = \{1,2,3,\dots,n\}$.

Assim, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$ é o número total de subconjuntos de E , sendo que, para formar subconjuntos de E , devemos decidir se cada elemento de E faz parte ou não de cada subconjunto que queremos formar.

Dessa forma, temos duas possibilidades para cada elemento de E (fazer parte ou não dos subconjuntos). Uma vez que E tem n elementos, de acordo com o Princípio Multiplicativo, o número de subconjuntos de E é: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n$.

Logo: $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

Exemplo 3.7.2. $\sum_{p=0}^{15} \binom{15}{p} = \binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \dots + \binom{15}{15} = 2^{15} = 32.768$

Situação 2 - $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \rightarrow p + (n-p) = n$ são binominais complementares ou combinações complementares.

Demonstração - $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n \cdot (n-p)!}{p \cdot 1 \cdot (n-p)!} = \binom{n}{p}$

Como n é o numerador, e $(n-p)$ é o denominador do número binominal, devemos demonstrar usando a fórmula das combinações simples $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemplo 3.7.3. - Mostrar que são iguais:

$$\begin{aligned}\binom{10}{3} &= \binom{10}{7} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{7! (10-7)!} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3!}\end{aligned}$$

Situação 3 - Relação de Fermat.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tem-se que $\binom{n}{p+1} = \binom{n-p}{p+1} \cdot \binom{n}{p}$.

Demonstração:

$$\binom{n-p}{p+1} \cdot \binom{n}{p} = \binom{n-p}{p+1} \cdot \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-p) \cdot n!}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!}$$

$$\text{é igual a } \frac{n!}{(p+1)![(n-(p+1))!]} \quad \text{que é igual a } \binom{n}{p+1}$$

Situação 4 - Relação de Stifel

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tem-se que $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Demonstração: Aplicando a propriedade 2 no 1º. membro da relação de Stifel, temos:

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \binom{n}{p} + \binom{n-p}{p+1} \cdot \binom{n}{p} = \binom{n}{p} \cdot \left(1 + \frac{n-1}{p+1}\right) = \binom{n}{p} \cdot \frac{(n+1)}{(p+1)} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n+1)}{(p+1)} = \frac{(n+1)!}{(p+1)![(n+1)-(p+1)]!}\end{aligned}$$

$$\text{que é igual a } \binom{n+1}{p+1}$$

3.8. Triângulo de Pascal ou Triângulo de Tartaglia

O Triângulo Aritmético já era conhecido dos matemáticos há muito tempo, e por esse motivo, recebeu aqui, diferentes denominações, são elas: Triângulo de Pascal, ou Triângulo de Tartaglia ou Triângulo de Yang-Hui. Referências ao triângulo aritmético ou a seus coeficientes podem ser encontradas em obras indianas e chinesas rudimentares, de épocas anteriores a Cristo (GALERA, 1998).

Na China, o Manual de Matemática de Jia Xian, escrito por volta do ano 1050, já traz o triângulo. O mais famoso matemático chinês associado ao Triângulo Aritmético foi Yang-Hui, que estudou e aplicou o triângulo aritmético por volta do ano 1250. Outra importante referência chinesa ao triângulo aritmético é o livro Precioso Espelho dos Quatro Elementos, escrito em 1303 por Chu Shih-Chieh. Esse livro traz figuras de triângulos com até nove linhas; entretanto, a denominação chinesa mais comum para o triângulo aritmético é Triângulo de Yang-Hui.

O poeta, astrônomo e matemático persa Omar Khayyam (1048-1122) descreveu o primeiro Triângulo Aritmético em alguns trabalhos por volta de 1100. Um arranjo semelhante dos coeficientes era conhecido dos árabes na mesma época, sendo que em 1265, o árabe Nasir al-Tusi (1201-1274) faz uma clara referência ao triângulo aritmético em uma de suas obras (DAVIS, 1994).

Na Europa, um século antes de Pascal, muitos matemáticos trabalharam com o Triângulo Aritmético. Um dos mais antigos foi o matemático alemão Apianus (Petrus Apianus, 1495-1552), que em 1527 publicou um livro cuja capa trazia um desenho do triângulo aritmético. Mas quem mais divulgou o triângulo foi o alemão Michael Stifel (1486-1567), principalmente por meio de sua muito e mais importante obra, intitulada “*Arithmetica Integra*”, de 1544 (GALERA, 1998).

Depois dos alemães, alguns matemáticos italianos redescobriram o triângulo aritmético. O principal deles foi Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1559), que dedicou a este assunto, muitas páginas de seu extenso livro “*General Tratado di Numeri et Misura*”, de 1556. Tartaglia reivindicou a criação do triângulo aritmético para ele, sendo que, atualmente, em alguns países este é chamado Triângulo de Tartaglia.

O francês Pascal (Blaise Pascal, 1623-1662) chegou ao triângulo aritmético motivado pela resolução de um problema que envolvia a probabilidade de obter um duplo 6 jogando dois dados. Escreveu uma monografia de 60 páginas sobre o

triângulo aritmético, “*Traité du triangle arithmétique*”, publicada postumamente em 1665. Pascal propôs o triângulo em nova forma e estudou suas propriedades mais a fundo que seus antecessores, provando várias delas (DAVIS, 1994).

A consagração da denominação atual como Triângulo de Pascal ocorreu pelo fato de, em 1739, Abraham de Moivre (1667-1754) ter publicado um trabalho de grande repercussão na época, em que usou a denominação “*triangulum arithmeticum pascalianum*” para o Triângulo Aritmético (GALERA, 1998).

O Triângulo de Pascal é formado por vários números relacionados entre si. Chama-se Pascal por ter sido aperfeiçoado por Pascal (DAVIS, 1994).

O triângulo abaixo é composto de linhas e colunas com números binominais: sendo $\binom{n}{k}$ o número binominal, **K** é o número correspondente à coluna e **n** o número corresponde à linha.

Figura 03 - Triângulo de Pascal com Binomiais

$\binom{0}{0}$					
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Nota-se que na quarta linha há 5 números binominais, com numeradores iguais a 4, e na terceira coluna todos com denominadores iguais a 2. Ou seja, todos os numeradores de uma mesma linha são iguais, sendo que o denominador de

todos os números binominais de uma certa coluna é igual ao número da coluna. É importante observar que o início de cada coluna e cada linha é em **zero**.

Dá-se a formação deste triângulo de forma recursiva, mostrando que a diagonal e a coluna de fora são formadas pelo número um. Os outros números representam a soma de dois números que estão acima.

Figura 04 - Triângulo de Pascal (soma de dois binominais que estão acima)

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Como exemplo, podemos citar que:

- ✓ $21 = 6 + 15$ (21-linha 7, 6 e 15 linha 6);
- ✓ o topo do triângulo corresponde à linha 0, Coluna 0.

A fórmula correspondente a essa propriedade é $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, sendo **K** o número correspondente à coluna, e **n** o número corresponde à linha. O topo do triângulo não é contado, pois numa sucessão definida por recorrência é necessário haver uma condição inicial, que é 1.

Propriedades: A soma dos elementos de cada linha deste triângulo forma uma potência de base dois.

Figura 05 - Triângulo de Pascal e a Soma dos Elementos de cada linha

1	$= 1 = 2^0$
1 + 1	$= 2 = 2^1$
1 + 2 + 1	$= 4 = 2^2$
1 + 3 + 3 + 1	$= 8 = 2^3$
1 + 4 + 6 + 4 + 1	$= 16 = 2^4$
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	$= 32 = 2^5$
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1	$= 64 = 2^6$
1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1	$= 128 = 2^7$

Fonte: Elaborado pelo autor(2016)

O Teorema das Colunas consiste em:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{n+1}.$$

É a soma dos números de uma coluna até determinada linha, somando os números de uma coluna **K** até determinada linha **n**, cujo resultado será igual ao número da próxima linha e coluna **K + 1**.

Figura 06 - Soma dos Números de uma Coluna no Triângulo de Pascal

1							
1	1						
1	2	1+					
1	3	3+	1				
1	4	6+	4	1			
1	5	10+	10	5	1		
1	6	15+	20	15	6	1	
1	7	21	=35	35	21	7	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

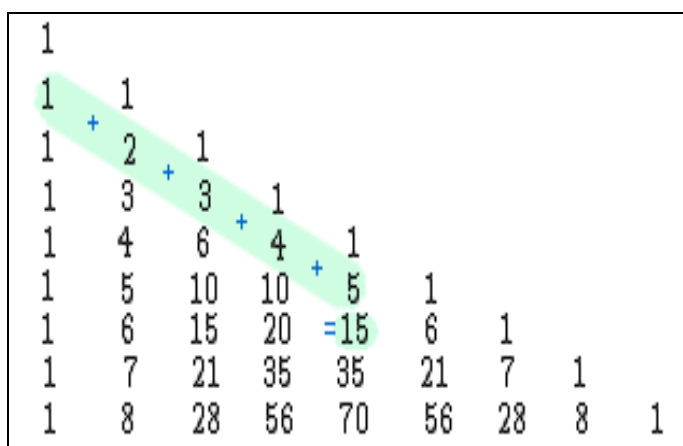
Exemplo: $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$

O Teorema das Diagonais consiste em:

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+p}^p = C_{n+p+1}^p.$$

É a soma dos elementos de uma diagonal (isto é, de uma paralela à hipotenusa), do Triângulo de Pascal (começando no primeiro elemento da diagonal); é igual ao elemento que está imediatamente abaixo da última parcela. É a soma dos números de uma diagonal até determinada linha.

Figura 07 - Soma dos Elementos de uma Diagonal no Triângulo de Pascal



1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

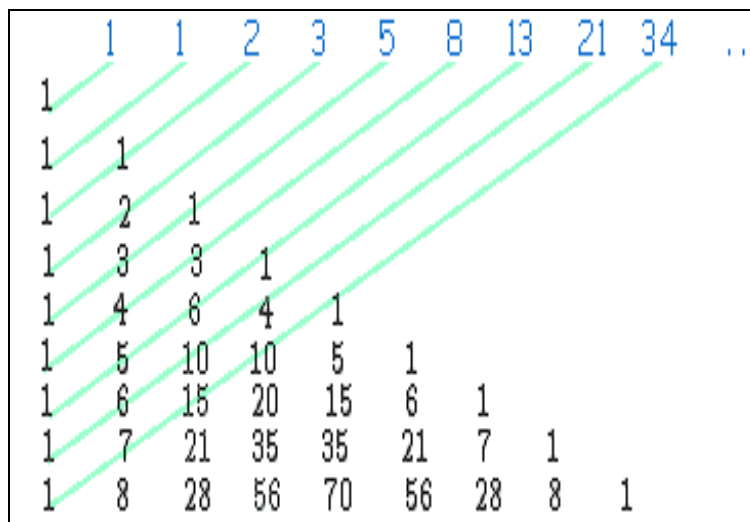
Verificamos que, ao somarmos os primeiros números de uma diagonal, como no exemplo do triângulo acima, o resultado será o número abaixo do último elemento utilizado na soma. O mesmo é válido para todas as diagonais.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

A totalização dos números acontece a partir da primeira coluna, e a cada número somado avançamos para a próxima linha e próxima coluna.

Números de Fibonacci nas Diagonais do Triângulo de Pascal

Figura 08 - Número de Fibonacci obtidos na soma da diagonal inversa



Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Os números de Fibonacci são obtidos através da soma dos dois números anteriores, formando uma sequência infinita, sendo os dois primeiros iguais a um. Dessa forma, temos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... (sequência de Fibonacci).

Essa sequência é obtida pela soma dos elementos da **n-ésima** “diagonal inversa” do Triângulo de Pascal.

3.9. Binômio de Newton

O matemático, físico e astrônomo inglês Isaac Newton, transitou com sucesso por várias áreas do conhecimento. Para isso, utilizou a Matemática. Sempre que um problema surgia em suas pesquisas, Newton tentava criar ferramentas matemáticas para resolvê-los.

Um dos trabalhos de Newton foi o estudo de potências da forma $(x + a)^n$. Observando o desenvolvimento de algumas dessas potências, em que **x** e **a** são números reais e **n** é um número natural, teremos:

Figura 09 - Desenvolvimento de Potências da Forma $(x + a)^n$

$$\begin{aligned}
 &(x + a)^n \\
 &(x + a)^0 = 1 \\
 &(x + a)^1 = 1x + 1a \\
 &(x + a)^2 = 1x^2 + 2a + 1a^2 \\
 &(x + a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3
 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Observando os coeficientes nesse desenvolvimento, temos:

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	

Podemos observar algumas linhas do Triângulo de Pascal, e a partir delas, podemos reescrever essas potências com seus respectivos desenvolvimentos, colocando os coeficientes na notação binominal $\binom{n}{p}$. Assim, temos:

Figura 10 - Desenvolvimento das Potencias na forma Binominal

$$(x + a)^0 = \binom{0}{0} x^0 a^0;$$

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0} x^1 a^0 + \binom{1}{1} x^0 a^1$$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} x^2 a^0 + \binom{2}{1} x^1 a^1 + \binom{2}{2} x^0 a^2$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} x^3 a^0 + \binom{3}{1} x^2 a^1 + \binom{3}{2} x^1 a^2 + \binom{3}{3} x^0 a^3$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2016)

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, aplicando o raciocínio usado na Análise Combinatória, podemos deduzir uma expressão relativamente simples para desenvolver essas potências.

Considerando a potência $(x + a)^5$, o seu desenvolvimento deverá ser realizado pelo produto de $(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)$.

De acordo com a propriedade distributiva, deveremos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, cinco fatores $(x \text{ ou } a)$, escolhendo cada um deles em uma das expressões entre parênteses, $(x + a)$.

Como resultado dessa multiplicação, teremos:

$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)$, multiplicando o x do 1º, 2º e 3º. parênteses e o a do 4º. e 5º. parênteses, obteremos o termo $x^3 a^2$.

Existem, outras possibilidades de multiplicação que resultam no mesmo termo. Quantos termos iguais a $x^3 a^2$ serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis?

Para respondermos a essa pergunta, recorreremos à Análise Combinatória. Devemos calcular o número de modos diferentes de escolher: x em três dos cinco fatores $(x + a)$, e a nos outros dois.

Note que, escolhido x em três fatores, a escolha de a fica automaticamente determinada nos fatores restantes. Assim, basta calcularmos o número de maneiras diferentes de escolher x em três dos cinco fatores. Esse número é a combinação simples de 5 tomados 3 a 3, $C_{5,3}$. Portanto, o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,3}$ vezes depois de efetuadas todas as multiplicações.

Raciocinando de maneira análoga:

- ✓ o termo x^5 aparecerá $C_{5,5}$;
- ✓ o termo x^4a aparecerá $C_{5,4}$;
- ✓ o termo x^2a^3 aparecerá $C_{5,2}$;
- ✓ o termo xa^4 aparecerá $C_{5,1}$;
- ✓ o termo a^5 aparecerá $C_{5,0}$.

Então, podemos escrever:

$$(x + a)^5 = C_{5,5}x^5 + C_{5,4}x^4a + C_{5,3}x^3a^2 + C_{5,2}x^2a^3 + C_{5,1}x^1a^4 + C_{5,0}a^5$$

Como $C_{5,5} = 1$, $C_{5,4} = 5$, $C_{5,3} = 10$, $C_{5,2} = 10$, $C_{5,1} = 5$ e $C_{5,0} = 1$, temos:

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Foi através deste raciocínio que Isaac Newton demonstrou que:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \dots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \dots + \binom{n}{n}x^na^0 \text{ sendo}$$

que x e a representam números quaisquer, $n \in \mathbb{N}$ e cada um dos símbolos $\binom{n}{p}$ representa $C_{n,p}$, devendo ser lido “número binominal n sobre p ”.

Exemplo 3.9.1 *Desenvolva o binômio $(x^4 + 2a)^3$.*

Utilizando o desenvolvimento de Newton, temos:

$$(x^4 + 2a)^3 = \binom{3}{0}(x^4)^0(2a)^3 + \binom{3}{1}(x^4)^1(2a)^2 + \binom{3}{2}(x^4)^2(2a)^1 + \binom{3}{3}(x^4)^3(2a)^0$$

$$\text{Igual a } 1 \cdot 1 \cdot 8a^3 + 3 \cdot x^4 \cdot 4a^2 + 3 \cdot x^8 \cdot 2a + 1 \cdot x^{12} \cdot 1$$

$$\text{que é igual a } = 8a^3 + 12x^4a^2 + 6x^8a + x^{12}$$

3.10. Termo Geral do Binômio de Newton

O termo “geral” serve para obter um determinado termo do desenvolvimento de $(a + b)^n$, sem a necessidade de desenvolver todos os termos.

Sejam **a** e **b** números reais e seja $n \in \mathbb{N}$, e fazendo o desenvolvimento de $(a + b)^n$ temos:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Sejam **a** e **b** números reais e seja $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$(a - b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + (-1)^n b^n$$

Portanto, para $p = 0$, temos no desenvolvimento o primeiro termo, que indicaremos por T_1 :

$$T_1 = \binom{n}{0} a^n b^0;$$

Para $p = 1$, temos no desenvolvimento o segundo termo, que indicaremos por T_2 :

$$T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} b^1;$$

Para $p = 2$, temos no desenvolvimento o terceiro termo, que indicaremos por T_3 :

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2;$$

Com base nesse raciocínio, sucessivamente, logo perceberemos que o número que representa a ordem do termo no desenvolvimento é uma unidade maior que o denominador do coeficiente binominal. Então: $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

Exemplo 3.10.1 Calcular o quarto termo do desenvolvimento de $(x^5 - 2a)^{10}$.

Teremos: $a = x^5$, $b = -2a$, $n = 10$, $p = 3$ e $p + 1 = 4$.

$$T_4 = \binom{10}{3} x^5 (-2a)^3 = -960 a^3 x^2$$

4 - TÉCNICAS DE ENSINO

A presente pesquisa de campo foi realizada no Laboratório de Matemática instalado nas dependências da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio 28 de Novembro, Ouro Preto, RO, no dia 29 de setembro de 2016, no período matutino com as turmas segundo ano A e segundo ano B, respectivamente com 27 alunos e 23 alunos, entre 9h 36min a 10h 23 min, no período vespertino com as turmas segundo ano C, D e E, respectivamente com 18 alunos, 23 alunos e 18 alunos, entre 13h a 14h 34 min, os alunos foram divididos em grupos de 5 alunos.

Foram desenvolvidas técnicas sobre como calcular combinações simples, arranjos e Triângulo de Pascal com seus padrões. No dia seguinte, solicitei aos alunos, durante a aula, que redigissem os depoimentos por escrito sobre as atividades realizadas no dia anterior.

A **1ª. atividade** proposta aos alunos foi a construção do Triângulo de Pascal.

Primeiro, eles recortaram o papel cartão em forma de quadrados, enumeraram os cartões; usaram duas placas de compensado, colando uma na outra com cola para isopor e fita crepe, para depois fixarem os cartões enumerados no isopor, construindo assim o Triângulo de Pascal.

Eles observaram que a soma dos elementos de cada linha do triângulo é uma potência de base 2. Descobriram os padrões das somas das diagonais e das colunas, que, através da soma dos elementos de cada diagonal até certo elemento, encontra-se o elemento que está abaixo do último número somado; no caso das colunas, a soma é o elemento que está na coluna à direita da coluna que foi somada, e na linha abaixo do último número somado.

Foi pedido a eles que confeccionassem os números binomiais e depois montassem o Triângulo de Pascal com esses números. Para tanto, foram utilizados os seguintes materiais: duas placas de isopor, papel sulfite e caneta hidrocor.

Para a realização da atividade envolvendo combinação simples, foi usado um pedaço de madeira, martelo, prego, borrachinha colorida.

Pedi a eles que pregassem 4 pregos não alinhados na madeira para que descobrissem quantos triângulos seria possível formar. Feita a atividade, eles constataram que poderiam ser formados 4 triângulos.

O calendário das atividades práticas a serem realizadas em laboratório de Matemática compreendeu as seguintes datas e horários:

Tabela 1 – CALENDÁRIO DAS ATIVIDADES NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Turma	Data	Horário	Atividade
2º A	29 set 16	Das 09:36 h às 10:23 h	Atividade no laboratório
2º C	29 set 16	Das 13:00 h às 13:47 h	Atividade no laboratório
2º E	29 set 16	Das 13:47 h às 14:34 h	Atividade no laboratório
2º D	20 set 16	Das 13:34 h às 15:21 h	Atividade no laboratório
2º B	05 out 16	Das 08:34 h às 09:21 h	Atividade no laboratório
2º A	05 out 16	Das 07:47 h às 08:34 h	Descobrimos padrões
2º B	06 out 16	Das 08:34 h às 09:21 h	Descobrimos padrões

Terminadas as atividades com todas as turmas, pude constatar que eles ficaram muito empolgados, alegres e felizes com essas aulas, porque foram muito diferenciadas e motivadoras. Puderam compreender as teorias, na prática.

Com essa aplicação, demonstrando na prática como encontrar os resultados possíveis, os alunos entenderam com mais facilidade do que nos anos anteriores, quando eu não usava estas ferramentas tão simples. Após a realização de todas as atividades práticas, os alunos resolveram diversos tipos de problemas que envolvem vários tipos de agrupamentos, usando as fórmulas, pois é preciso que eles se familiarizem com elas, uma vez que seu uso é indispensável, quando trabalhamos com valores grandes, já que é inviável demonstrar através de exemplos práticos.

No fechamento do bimestre foi aplicada uma avaliação para averiguação da aprendizagem e rendimento escolar, podemos observar que os resultados foram positivos, comparativo nas tabelas abaixo com os anos de 2014 e 2015.

TABELA 2 - Rendimento Escolar do Ensino Médio no 3º. Bimestre – 2014

TURMA	M	T	E	S	R	A%	R%
2º. A	28	-	-	13	15	46,43%	53,57%
2º. B	15	3	-	7	5	58,33%	41,67%
2º. C	27	-	-	17	10	62,96%	37,04%
2º. D	32	-	-	10	22	31,25%	68,75%
2º. E	35	7	-	12	16	42,86%	57,13%

Fonte: Elaborada pelo autor (2016)

Legenda: **M**- Matricula **T**- Transferido **E**- Evasão **A**- Aprovado **R**-Reprovado

TABELA 3 - Rendimento Escolar do Ensino Médio – 3º. Bimestre - 2015

TURMA	M	T	E	A	R	A%	R%
2º. A	29	1	-	14	14	50,00%	50,00%
2º. B	25	1	-	16	8	66,67%	33,33%
2º. C	22	2	-	6	14	30,00%	70,00%
2º. D	27	2	-	7	18	28,00%	72,00%
2º. E	23	1	-	10	12	45,45%	54,55%

Fonte: Elaborada pelo autor (2016)

Legenda: **M**- Matricula **T**- Transferido **E**- Evasão **A**- Aprovado **R**-Reprovado

TABELA 4 - Rendimento Escolar do ensino Médio – 3º. Bimestre – 2016

TURMA	M	T	E	A	R	A%	R%
2º. A	31	4	-	18	9	66,67%	33,33%
2º. B	34	7	4	17	6	73,91%	26,09%
2º. C	22	3	1	12	6	66,67%	33,33%
2º. D	24	1	-	19	4	82,61%	17,39%
2º. E	23	5	-	10	8	55,56%	44,44%

Fonte: Elaborada pelo autor (2016)

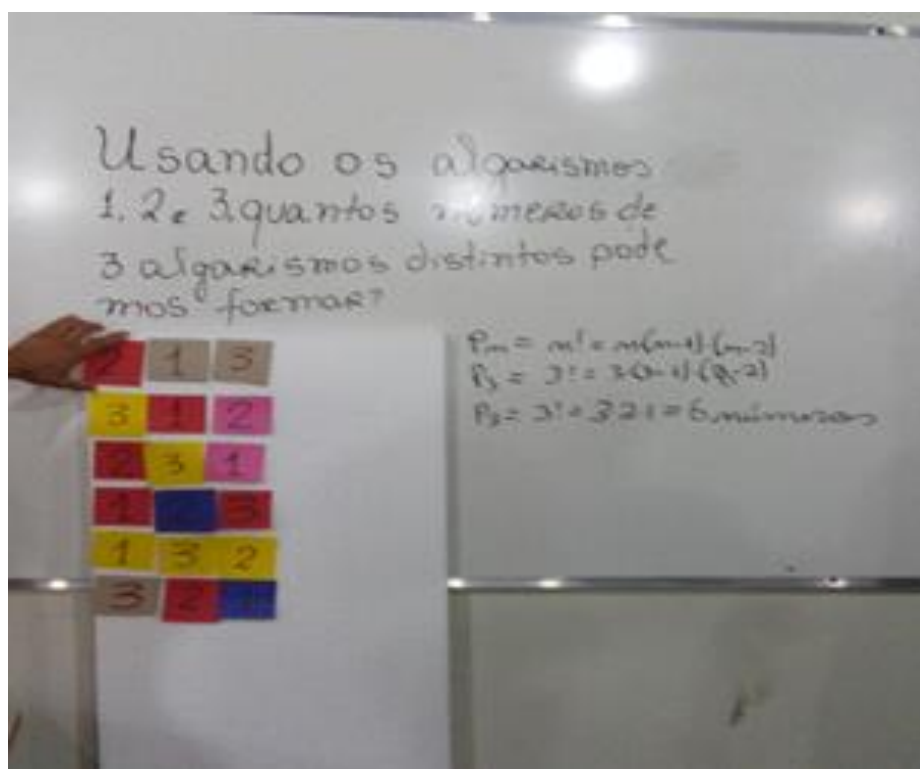
Legenda: **M**- Matricula **T**- Transferido **E**- Evasão **A**- Aprovado **R**-Reprovado

4.1. Aplicação das Atividades

A 1ª. **atividade** proposta aos alunos foi no dia 22 de setembro de 2016, foi proposta aos alunos do 2º. ano, a partir da seguinte pergunta: “Quantos números com três algarismos distintos podemos escrever usando os algarismos 1, 2 e 3 ?”

O aluno L. R. L. do 2º ano E, propôs-se a realizar o problema, foi à frente com uma placa de isopor e uma caixa contendo os algarismos citados, pegou um algarismo por vez, foi formando os possíveis números, e posteriormente, fez alguns cálculos usando permutação simples, como mostra a figura 16 abaixo.

Figura 11 - Números com três algarismos



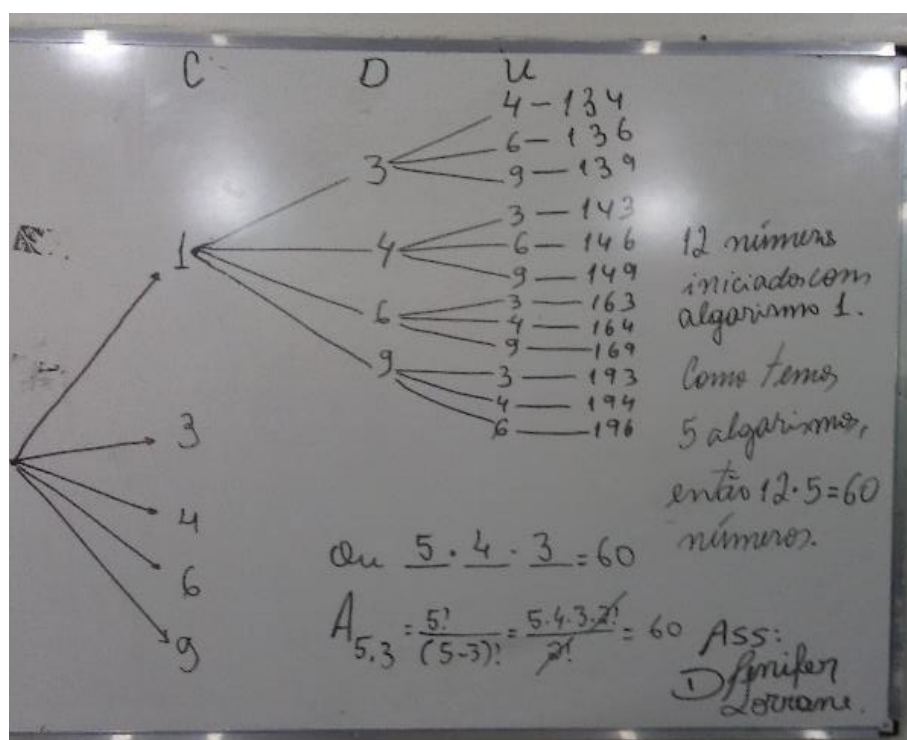
Fonte: fotografado pelo autor (2016)

A 2ª. atividade proposta, feita num segundo momento está relacionada ao emprego do Diagrama de Árvore e Arranjo simples, através do qual, era preciso definir: “qual é a quantidade de números com algarismos distintos que podem ser escritas utilizando-se apenas os algarismos 1, 3, 4, 6 e 9 ?”

Desta vez, foi a aluna D. L. J. R. do segundo ano E, que mostrou, na lousa, a ordem das centenas, ela teve cinco (5) opções de escolha, para a ordem das dezenas ela teve quatro (4) opções de escolher um algarismo e para as unidades simples, ela teve três (3) opções de escolha.

De acordo com o Princípio Multiplicativo ela constatou que a operação “ $5 \times 4 \times 3 = 60$ números”, pode ser feita a partir da utilização da fórmula de Arranjo Simples, obtendo o mesmo resultado, como pode ser visualizado na figura 22.

Figura 12 - Diagrama de Árvore



Fonte: fotografado pelo autor (2016)

A **3ª. proposta** foi que os alunos calculassem:

“Quantas são as palavras (com significado ou não) de 3 letras que podemos formar com as letras A, P, I ?” “Quais são essas palavras?”

Considerando as três letras A, P e I, há 3 possibilidades para a primeira posição, 2 possibilidades para a segunda posição e uma possibilidade para a terceira posição.

De acordo com o Princípio Fundamental da Contagem, existem 6 possibilidades ($3 \times 2 \times 1 = 6$), sendo possível a formação de seis (6) palavras, são elas: PAI, PIA, AIP, API, IAP e IPA.

A **4ª. atividade** proposta foi calcular:

“De quantas maneiras podemos escolher um pivô e uma ala em um grupo de 12 jogadores de basquete?”

A resolução que se espera do aluno:

Para o pivô temos 12 opções de escolha e para a ala teremos 11 opções, uma vez que uma já foi escolhida para o pivô.

O “n” é o total de jogadores e “p” é os que vou escolher duas opções.

Então teremos número de arranjos simples de 12 tomados 2 a 2.

$$A_{12,2} = \frac{12!}{(12-2)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132 \text{ maneiras}$$

A **5ª. proposta** feita consistiu em: “De quantas maneiras podemos organizar essas 3 bolsas em 3 cadeiras?”

Esta atividade foi realizada pelas alunas M. F. B., C. L. M. e K. L. P. do 2º ano D, e concluíram que são 6 maneiras para mostrar os possíveis arranjos, como demonstra a figura 18.

Figura 13 – Arranjo feito pelos alunos com 3 mochilas



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 14 - Alunos do 2º. ano A mostrando na prática a maneira de organizar três mochilas em três cadeiras



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

A **6ª atividade** proposta consistiu na seguinte pergunta: “de quantos modos 5 pessoas pode se sentar em um sofá que possui lugares para 4 pessoas?”

Sugeri a eles que essas pessoas poderiam estar na recepção de um consultório odontológico, e dessa forma, teriam que construir também o referido sofá. Para construírem o sofá, os alunos utilizaram caixas de fósforos, papelão e cola. Por sua vez, para representar as pessoas na recepção, as alunas trouxeram bonecas de casa. A aluna K. B. A. do 2º ano B, se propôs a realizar esta atividade, como demonstra a figura 19.

Figura 15 - Arranjos realizados pela aluna Karielhe



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Nesta atividade foi calculado arranjo de 5 tomadas 4 a 4, uma vez que existem cinco pessoas no consultório, porém, apenas 4 pessoas sentadas.

$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ maneiras.}$$

Depois das atividades com os alunos do 2ª. Ano B, esta mesma atividade foi realizada com as alunas **K. P. S.**, **B. R. P.** e **D. M. L.** do 2º ano A.

Eu coloquei duas cadeiras na frente da lousa e propus o seguinte problema:

“De quantas maneiras diferentes podem se sentar as três alunas nestas 2 cadeiras?”

Solução dada pelos alunos mostrando na prática:

Como o sofá possui lugares apenas para duas pessoas, uma pessoa terá que ficar em pé em algum momento, e depois ceder o lugar para o outro, logo ficará desta forma o arranjo; DK, DB, KB, KD, BD, BK.

Assim podemos observar que, com valores pequenos, temos como demonstrar todos os arranjos, na prática, e com valores grandes, o que fica impossível, na prática.

Usando a fórmula teremos: $A_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ maneiras}$

Para a **7ª. atividade**, eu solicitei aos alunos W. K. R., E. H. A. e D. S. B., do 2º ano C, que colocassem 3 cadeiras na frente e mostrassem para os demais colegas; “de quantas maneiras eles poderiam se acomodar nas 3 cadeiras”, enquanto a aluna S. R. P. escreveu os possíveis arranjos na lousa.

Uma vez que são 3 alunos e 3 cadeiras, temos arranjos de 3 tomados 3 a 3, cujo cálculo pode ser feito através da fórmula:

$$A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{0!} = 6 \text{ maneiras}$$

Figura 16 - Alunos mostrando quantos são os arranjos



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

A **8ª. atividade** propôs o cálculo possível para serem encontradas:

“Todas as maneiras que tem para os alunos que estão presentes em sala (11) tomados 3 a 3? “ “ realizada com 2º ano C”.

A solução é:

$$A_{11,3} = \frac{11!}{(11-3)!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 900 \text{ maneiras},$$

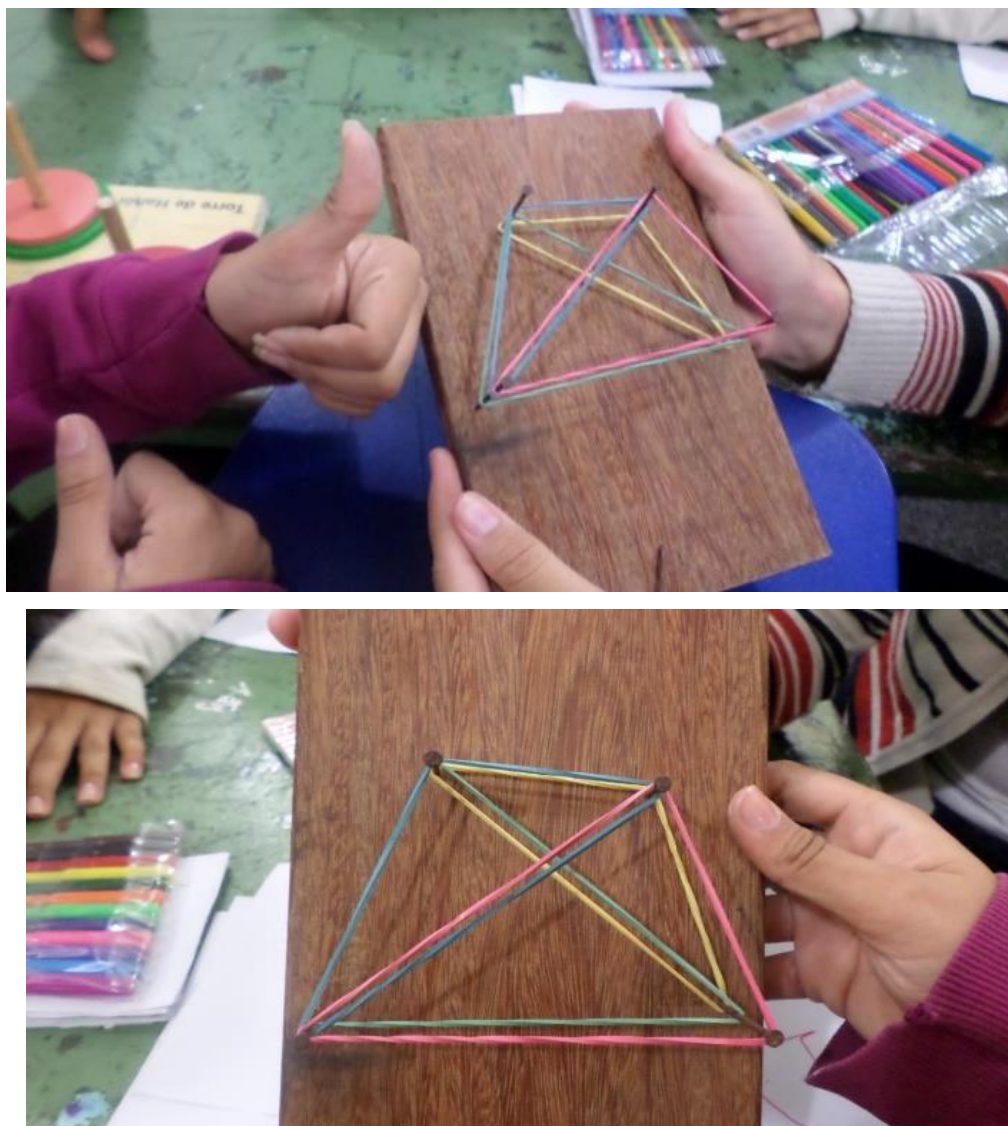
Entretanto, quando chegaram mais 2 alunos, os arranjos foram recalculados, partindo de um total de 13 pessoas tomados 3 a 3, cuja solução foi:

$$A_{13,3} = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716 \text{ maneiras}$$

Para a **9ª. atividade** foi preciso que utilizassem 4 pregos e um pedaço de madeira. A proposta era descobrir quantos triângulos podem ser formados contando sempre com 3 pregos para representar os vértices de um triângulo.

Eu forneci aos alunos aqueles elásticos coloridos que são utilizados normalmente para prender maços de dinheiro, e assim, eles puderam simular situações até descobrirem que com essa quantidade e materiais, pode-se formar 4 triângulos, demonstrados na figura 28.

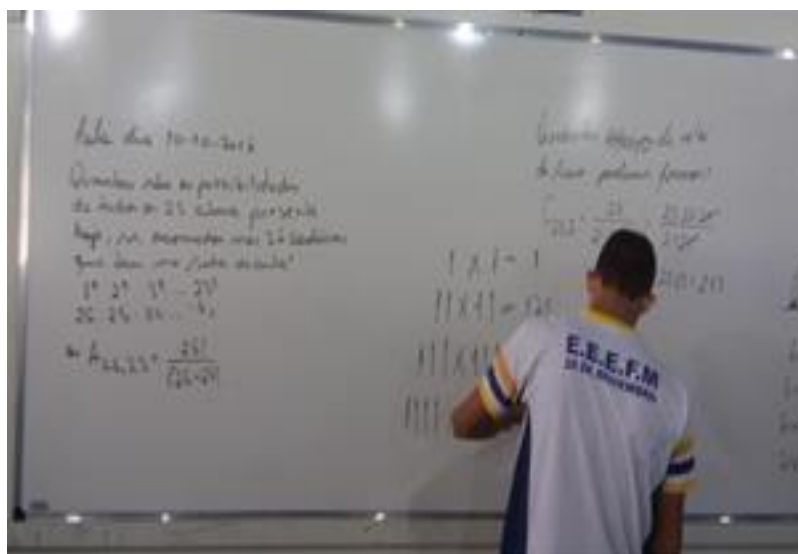
Figura 17 - Triângulos a partir de 4 pontos



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

A **10ª. atividade** O aluno L. F. V., demonstrando na lousa um padrão que descobriu no qual forma um triângulo isósceles, formado pelas potências que tem como base números que possui somente o algarismo 1 e como expoente o número 2, mostrou também a diferença entre arranjo e combinação.

Figura 18 - Aluno demonstrando padrões na lousa



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 19 - Alunos do 2º ano A descobrindo quantos triângulos podem formar



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Para a **11ª. atividade**, o problema abaixo foi exposto em uma tv, fixada na sala de aula.

“Se todos os 23 alunos presentes hoje, fossem se cumprimentar com um aperto de mão, qual seria o total de apertos de mão?”

Em primeiro lugar, é preciso ler e compreender o problema, fazendo os questionamentos: o que propõe o enunciado do problema?

O enunciado informa que há 23 alunos presentes, e que irão cumprimentar-se uns aos outros, com um aperto de mão.

Para entendermos melhor, sugeri selecionarmos 5 alunos através de um sorteio, para podermos trabalhar com valores menores, simplificando a situação em uma demonstração prática, e assim, refazendo a pergunta:

“Qual será o total de apertos de mão entre esses 5 alunos?”

Solicitei aos alunos sorteados que fizessem uma pequena apresentação em sala de aula, para que todos percebessem na prática qual seria o total de cumprimentos. Dessa forma, o que se deu na prática foi:

O primeiro aluno apertou a mão de 4 colegas; o segundo, 3 colegas; o terceiro, 2 colegas; o quarto, um colega e o quinto não apertou a mão de ninguém, pois ele já foi cumprimentado por todos os demais. A partir do raciocínio combinatório, o resultado foi:

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10, \text{ totalizando 10 cumprimentos.}$$

Ainda com base no Raciocínio Combinatório, temos que são 5 alunos que vão se cumprimentar. Já vimos que não importa a ordem no cumprimento, ou seja, quando A cumprimenta B, B já cumprimentou A (não conta duas vezes conta apenas uma vez).

Assim, estamos combinando 5 alunos, 2 a 2. Para encontrar o número total de combinações, fazemos:

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Assim, temos um total de 10 cumprimentos.

A **12a. atividade** foi desenvolvida com os alunos do 2º. ano A. Foram necessários papel cartão e folhas de papel sulfite, para que pudessem elaborar uma demonstração do Triângulo de Pascal.

Os alunos recortaram o papel cartão, nos quais escreveram os números naturais; em seguida, escreveram os números binominais nos recortes de papel sulfite, para finalmente demonstrarem a montagem do Triângulo de Pascal.

Figura 20 - Alunos do 2º. Ano A recortando material para montar triângulo de Pascal



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 21 - Alunos do 2º. Ano A raciocinando para montar o triângulo de Pascal



Fonte: Fotografado por um aluno, a pedido do autor (2016)

Figura 22 – Aluna do 2º. Ano A descobrindo os padrões



Fonte: Fotografado por um aluno, a pedido do autor (2016)

Figura 23 - Alunos do 2º. Ano A procurando os números naturais que irão colocar na próxima linha



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 24 - Alunos do 2º. Ano A construindo o Triângulo de Pascal



Fonte: Fotografado por um aluno, a pedido do autor (2016)

Figura 25 - Triângulo de Pascal, trabalho concluído no 2º. Ano A



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 26 – Triângulo de Pascal colorido pelos alunos do 2º. Ano A



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

A **13ª. atividade** foi realizada no dia 29 de outubro de 2016. Foi proposta aos alunos do 2º. Ano C, e também estava relacionada à construção do Triângulo de Pascal. Foi realizada no laboratório de Matemática.

Além da construção do triângulo, eles foram incumbidos em explicar aos seus colegas, todas as propriedades das colunas, das linhas e das diagonais.

Figura 27 - Alunos do 2º. ano C no laboratório de Matemática



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 28– Alunos do 2º ano C construindo o Triângulo de Pascal



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 29 - Triângulo de Pascal Isósceles pelos Alunos do 2º ano C



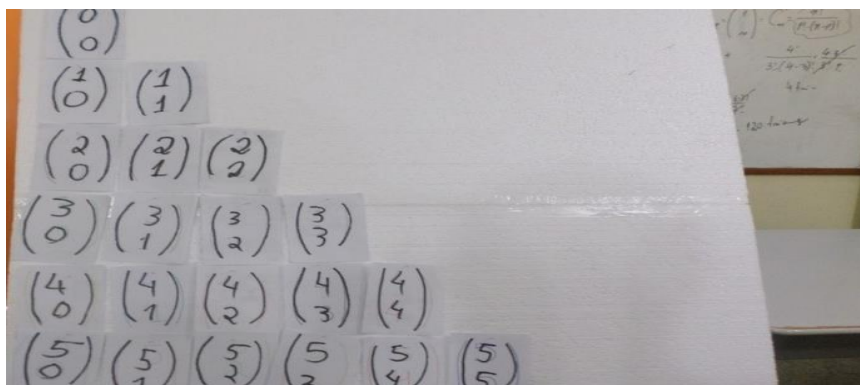
Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 30 - Alunos do 2º ano C construindo o Triângulo de Pascal com binomiais



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Figura 31 - Triângulo de Pascal elaborado pelos Alunos do 2º ano C



Fonte: Fotografado pelo autor (2016)

Depois de ter realizadas todas as aulas práticas, foram propostas, já em sala de aula, a resolução das seguintes questões:

Se: $\binom{m}{14} = \binom{m}{15}$, calcule $\binom{m}{29}$, utilize a fórmula das combinações simples.

$$\frac{m!}{14!(m-14)!} = \frac{m!}{15!(m-15)!} \Rightarrow m! 14!(m-14)! = m! 15!(m-15)!$$

$$\frac{m! 14!}{m! 15!} = \frac{(m-15)!}{(m-14)!} \Rightarrow \frac{14!}{15 \cdot 14!} = \frac{(m-15)!}{(m-14)(m-15)!} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{1}{m-14}$$

$$m - 14 = 15 \Rightarrow m = 29$$

Uma vez que $m = 29$, logo teremos: $\binom{m}{29} = \binom{29}{29} = 1$, pela propriedade dos binominais, quando numerador e denominador são iguais o resultado será sempre 1.

Os alunos realizaram esta atividade usando a demonstração acima, com auxílio do professor:

Na resolução de questões usando as propriedades do Triângulo de Pascal, em uma delas foi observado que encontramos a fórmula utilizada para descobrir qual é o número mínimo de movimento que devemos realizar, para transportar os discos do primeiro pino para o terceiro pino em uma torre de Hanói, na soma dos binominais de qualquer uma das linhas menos o primeiro binominal.

Exemplo:

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = f_{(n)} = 2^n - \binom{n}{0} \Rightarrow f_{(n)} = 2^n - 1$$

Através das atividades práticas e exercícios propostos posteriormente, os alunos puderam observar que, no Triângulo de Pascal, os números equidistantes têm o mesmo valor, isto é, estão a uma mesma distância a partir do ponto central.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca por novas técnicas e metodologias de ensino de Matemática em sala de aula deve se tornar uma prática constante que envolva não somente os docentes de matemática, mas também, toda a comunidade escolar.

O mundo globalizado dos dias atuais, o avanço tecnológico, entre outras facilidades, são fatores que exigem mudanças e transformações nas práticas pedagógicas relacionadas ao ensino de Matemática.

Para fundamentar com maior profundidade o presente estudo, abordou-se a didática do ensino de matemática na escola, através de um levantamento histórico sobre onde, quando e como a matemática se originou. Contou ainda com sua evolução na história, desde o seu surgimento, e até os nossos dias, contando toda a sua trajetória, biografias, descobertas e dificuldades.

O objetivo principal desta dissertação foi buscar experiências inovadoras ao trabalhar com alunos dos 2º.s anos do Ensino Médio, durante as quais, a aprendizagem foi alcançada, como podemos comprovar através das tabelas com os índices, dos anos de 2014, 2015 e 2016. Logo o projeto das atividades práticas, foram atingidas satisfatoriamente.

A partir da aplicação de diferentes jogos, que contaram com materiais bem simples, as aulas ficaram bem mais atrativas, melhorando significativamente o interesse dos alunos pelos conteúdos trabalhados. Verificou-se também que a implementação de aulas mais dinâmicas, colaborou para maior interatividade entre os alunos, e as aulas ficou também mais interessante.

Os alunos passaram a gostar mais das aulas de Matemática, e com isso, a amizade de uns para com os outros aumentou, bem como a simpatia dos alunos para com o professor, que se tornou recíproca. Isto pode ser visto através dos depoimentos dos alunos sobre as novas técnicas do ensino e sobre as aulas.

As vivências permitidas pela aplicação de técnicas práticas em laboratório especializado para Matemática permitiram perceber o ensino sob uma nova perspectiva, sendo muito importante como experiência profissional e enriquecedora, com a qual muito aprendi durante as atividades com os alunos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriana Luziê de. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática**. Dissertação [Mestrado] apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, 2012. Disponível em:

[http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/2522/1/DISSERTAÇÃO_EnsinandoAprendendoAnálise.pdf]; acesso em 02 ago 2016.

ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. **Aprendendo Análise Combinatória através da Resolução de Problemas: um Estudo com Classes de 9º ano do ensino fundamental e 2º ano do ensino médio**. In: IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4, 2009, Ouro Preto. Anais, Ouro Preto: UFOP, 2009. p. 1-20. Disponível em:

[http://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/1293/1/EVENTO_AprendendoAnáliseCombinatória.pdf]; acesso em 26 ago 2016.

ALEA. **Pierre de Fermat**. 2016. Disponível em:

[<http://www.al...ea.pt/html/nomesEdatas/swf/biografias.asp?art=5>]; acesso em 18 jul 2016.

ARAÚJO, Fábio Moreira de; RIBEIRO, Humberto Irineu Chaves; CEDRO, Wellington Lima. **Do lúdico ao sério: um caminho para o ensino do Princípio fundamental da contagem**. Anais do XEPIII Encontro Paranaense de Educação Matemática. A Educação matemática no Paraná – 20 anos: Avanços, Desafios e Perspectivas. p.590-601, 17 a 19 de setembro de 2009. Disponível em:

[<http://www.unicentro.br/editora/anais/xeprem/>]; acesso em 26 ago 2016.

ARRUDA, Lynnyngs K. **História da Matemática – Notas de Aula**. Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos. 2012. Disponível em:

[<http://www.dm.ufscar.br/profs/lynnynys/HMnovo.pdf>]; acesso em 02 ago 2016.

BERTI, Nívia Martins. **O Ensino de Matemática no Brasil: Buscando Uma Compreensão Histórica**. Universidade Estadual de Ponta Grossa-UEPG. 2005. Disponível em:

[http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada6/trabalhos/617/617.pdf]; acesso em 02 ago 2016.

BOYER, Carl B. **Resumos Literários – Conhecimento Específico 1 - A História da Matemática**. 2011.

_____, **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

_____, **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

_____, **História da Matemática**. 2. Ed.; São Paulo: Edgard Blücher, 1996

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148 p. Disponível em: [\[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf\]](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf); acesso em 28 jul 2016.

_____, **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: [\[http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf\]](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf); acesso em 26 ago 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Média e Tecnologia**. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio. Brasília: MEC, 1999.

BRITO, Maria das Dores Costa. **A História Da Matemática No Brasil**. 2007. Disponível em: [\[https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/MariadasDoresCostaBrito.pdf\]](https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/MariadasDoresCostaBrito.pdf); acesso em 23 set. 2016.

CARNEIRO, Vera Clotilde Garcia. **Educação Matemática no Brasil: uma meta-investigação**. Quadrante Revista Teórica e de Investigação, Lisboa, vol. 9, n. 1, p. 117-140, 2000. Disponível em: [\[http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/QUADRANT.pdf\]](http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/QUADRANT.pdf); acesso em 02 ago 2016.

CATALDO, João Carlos. **Análise combinatória: a importância dos métodos de contagem – parte 1**. Revista Eletrônica do Vestibular. Ano 6, n. 18, 2013. Disponível em: [\[http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo-pdf.php?seq_artigo=31\]](http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo-pdf.php?seq_artigo=31); acesso em 26 ago 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações. 2ª ed. – São Paulo: Ática, 2013.

DAVIS, Harold T. **Computação: tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1994.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** - tradução Hygino H.Domingues, 5. ed. – Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

_____, **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

_____, **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

_____, **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

GOMES, Maria Laura Magalhães, história do Ensino da Matemática: **Uma introdução – Belo Horizonte-CAED - UFMG, 2012.**

GALERA, Maria Cristina Solaeche. **Sistema de Tabulacion de Coeficientes Binomiales o Triangulo de Pascal: un Modelo Numerico Rasga el Telar de los Tiempos**. Divulgaciones Matemáticas vol 6, n. 1, p.61-68, 1998. Disponível em: [\[https://www.emis.de/journals/DM/v61/art7.pdf\]](https://www.emis.de/journals/DM/v61/art7.pdf); acesso em 20 jul 2016.

GARCIA, Domingos Boaes. **Resolução de Problemas Combinatórios Utilizando Funções Geradoras**. Dissertação [Mestrado] em Matemática, apresentada ao Centro de Ciências Exatas e Tecnologia Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Maranhão. São Luis, 2013. Disponível em: [\[http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/443/2011_00331_DOMINGOS_BOAES_GARCIA.pdf?sequence=1\]](http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/443/2011_00331_DOMINGOS_BOAES_GARCIA.pdf?sequence=1); acesso em 15 set 2016.

GODOY, Elenilton Vieira. **A Matemática no Ensino Médio – a Trajetória Brasileira desde a Década de 80 e as Organizações Curriculares de Outros Países**. 2010. Disponível em: [\[http://periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/viewFile/428/455\]](http://periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/viewFile/428/455); acesso em 12 set 2016.

GONÇALVES, Ida Maria Faria de Lira. **Os Problemas da Matemática O seu papel na Matemática e nas aulas de Matemática**. Tese [Doutorado] em Matemática - Ensino da Matemática, apresentada à Universidade da Madeira, Setembro de 2011. Disponível em: [\[http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/559/1/DoutoramentoldaGoncalves.pdf\]](http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/559/1/DoutoramentoldaGoncalves.pdf); acesso em 03 ago 2016.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**: Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática. 1ª ed. – Rio de Janeiro, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Temas e Problemas**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LOPES, Celi Espasandin. Sessão Trabalho Encomendado – Anped34 – 2011. **A Educação Matemática no Ensino Médio**. Grupo de Trabalho TG 19 – Educação Matemática. p. 1-47, 2011. Disponível em: [\[http://www.ufrj.br/emanped/noticia/docs/TextosGT19Anped2011_TrabEncomendado.pdf\]](http://www.ufrj.br/emanped/noticia/docs/TextosGT19Anped2011_TrabEncomendado.pdf); acesso em 26 ago 2016.

MIGUEL, Antonio; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; D'AMBROSIO, Ubiratan. **A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização**. Revista Brasileira de Educação, n. 27, p.70-93, set /out /nov /dez 2004. Disponível em: [\[http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a05\]](http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a05); acesso em 02 ago 2016.

MOL, Rogério Santos. **Introdução a história da Matemática**. Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013.

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Manual de Redação Matemática** – Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. **Análise Combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

OLIVEIRA, Natália Cristina de; BORGES, Felipe Augusto Fernandes; BORTOLOSSI, Cíntia Maria Bogo; MARQUES, Daniella Domingues Alvarenga; COSTA, Célio Juvenal. **Marques de Pombal e a Expulsão dos Jesuítas: Uma leitura do Iluminismo português no século XVIII**. 11º. Simpósio sobre Estudos e Pesquisa História, Sociedade e Educação no Brasil HISTEDBR. Universidade Estadual de Maringá – UEM.2013. Disponível em: [\[http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada11/artigos/4/artigo_simposio_4_805_nat_oliveir@hotmail.com.pdf\]](http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada11/artigos/4/artigo_simposio_4_805_nat_oliveir@hotmail.com.pdf); acesso em 15 set 2016.

OHSE, Marcos Leandro. **História da Matemática**: A Matemática Medieval no Continente Europeu, Ano 13 nº. 22. Educação Matemática em Revista, 2007a.

_____, **História da Matemática. A Matemática na Antiguidade. (Pré-História, Egito Antigo, Mesopotâmia e Grécia Antiga)**. 2007b. Disponível em: [\[http://www.somatematica.com.br/historia.php\]](http://www.somatematica.com.br/historia.php); acesso em 31 jul 2016.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Ensino Médio**, 2ª ed. – São Paulo, Moderna, 2013.

PEDROSO, Hermes Antonio. **História da Matemática**. Setembro de 2009. Disponível em: [\[https://issuu.com/joaoe.brito/docs/apostila_hist_mat_prof.hermes_pedro\]](https://issuu.com/joaoe.brito/docs/apostila_hist_mat_prof.hermes_pedro); acesso em 20 ago 2016.

PÉTIN, Pierre. **Tópicos de História da Matemática através de Problemas**. 2013. Disponível em: [\[http://www.professores.uff.br/marco/historia-2013/Pierre.pdf\]](http://www.professores.uff.br/marco/historia-2013/Pierre.pdf); acesso em 02 ago 2016.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: Ciência, Linguagem e tecnologia**. Ensino médio – São Paulo: Scipione, 2010.

SANTOS, Luiz Anderson de Moraes. **Utilização de Material Concreto no Ensino de Matemática: uma Experiência com o Teodolito Caseiro no Ensino de Trigonometria**. Dissertação [Mestrado] apresentada ao Curso de Matemática do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, Porto Velho - RO, 2015.

SILVA, Maxwell Aires da. **A História da Matemática**. Universidade Estadual da Paraíba - UEPB. 2016a. Disponível em: [\[http://www.ebah.com.br/content/ABAAAhApsAA/a-historia-matematica\]](http://www.ebah.com.br/content/ABAAAhApsAA/a-historia-matematica); acesso em 15 set 2016.

SÓ HISTÓRIAS. **AS ETAPAS DA EVOLUÇÃO HUMANA**. 2016. DISPONÍVEL EM: [\[http://www.sohistoria.com.br/ef2/evolucao/p2.php\]](http://www.sohistoria.com.br/ef2/evolucao/p2.php); acesso em 15 set 2016.

SÓ MATEMÁTICA. **Blaise Pascal**. 2016. Disponível em: [\[http://www.somatematica.com.br/biograf/pascal.php\]](http://www.somatematica.com.br/biograf/pascal.php); acesso em 18 jul 2016.

VAZQUES, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. **Análise Combinatória: Alguns Aspectos Históricos E Uma Abordagem Pedagógica**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação matemática: um compromisso social. Recife, 15 a 18 de junho de 2004. Universidade Federal de Pernambuco. Disponível em

:[\[http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf\]](http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf); acesso em 26 ago 2016.

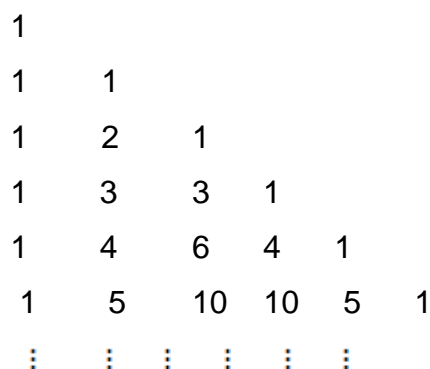
VEGA, Danielle Avanço; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. **Etapas de escolha na resolução de produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações.** JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática. IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Education 27 – vol. 7, n.3, 2014. Disponível em: [\[http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/70/61\]](http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/70/61); acesso em 15 set 2016.

VIEIRA, Mariana Antunes. **Idade dos Metais.** 2009. Disponível em: [\[http://web.ccead.puc-rio.br/condigital/mvsl/linha%20tempo/Idade_Metais/pdf_LT/LT_idade_dos_metais.pdf\]](http://web.ccead.puc-rio.br/condigital/mvsl/linha%20tempo/Idade_Metais/pdf_LT/LT_idade_dos_metais.pdf); acesso em 10 set 2016.

APÊNDICE A – ATIVIDADE BUSCANDO PADRÕES

A figura abaixo apresenta as primeiras linhas de um arranjo geométrico formado por números dispostos em linhas e colunas conhecido como Triângulo Aritmético, Triângulo de Tartaglia – Pascal ou simplesmente Triângulo da Pascal.

Observe:



Agora que você conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção de linhas do triângulo?
2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do triângulo? Cite-os.
3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna.
Observando os resultados, o que você pode concluir?
É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?
4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo?
Complete a figura até a 10ª linha.

APÊNDICE B – RESPOSTAS DOS ALUNOS AO QUESTIONÁRIO

Nas próximas páginas serão apresentadas as respostas dos alunos que participaram das atividades práticas, através das quais, será possível observar quais foram as regularidades detectadas por eles.

Aluna: A. P.

- 2º. Ano – Turma A

Data: 05/10/2016

Agora que você conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção de linhas do triângulo?

Resposta: Cada número da linha abaixo é igual à soma de dois da linha acima.

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do triângulo? Cite-os.

Resposta: A soma dos elementos de uma mesma linha é o resultado de uma de uma potência de base dois.

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir?

É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Resposta: Sim.

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura até a 10ª linha.

Resposta: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Aluna: S.T. - 2º. Ano - Turma A Data: 05/10/2016

Agora que você conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção de linhas do triângulo?

Resposta: somando os números da lateral e da vertical dará o resultado de baixo

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do triângulo? Cite-os.

Resposta: todas as somas das linhas têm potência de expoente de base 2

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir?

É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Resposta: A soma dos 4 primeiros números de uma coluna resulta no número que esta na coluna da direita e na próxima linha.

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura até a 10ª linha.

Resposta: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Aluna: K. B. A. - 2º ano - Turma B Data: 06/10/2016

Agora que você conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção de linhas do triângulo?

Resposta: Se somarmos os dois elementos da 2ª linha teremos o resultado do segundo da 3ª linha. (OBS= o resultado sempre estará a direita). Os extremos são iguais, e os números equidistantes apresentam o mesmo valor.

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do triângulo? Cite-os.

Resposta: Se somarmos a diagonal encontraremos o resultado abaixo do último número somado.

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir?

É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Resposta: Sim. Que o resultado dessa soma pode estar na linha de baixo

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura até a 10ª linha.

Resposta:

Aluna: V. M. A. - 2º ano - Turma B Data: 06/10/2016

Agora que você conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção de linhas do triângulo?

Resposta: A soma de dois números da linha anterior é igual ao número da linha abaixo.

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do triângulo? Cite-os.

Resposta: O triângulo é simétrico, linhas ímpares tem dois números iguais no centro e pares tem apenas um sozinho. Logo os extremos são iguais.

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir?

É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Resposta: sim, a soma dos elementos se torna o próximo número.

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura até a 10ª linha.

Resposta: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Aluna: M. V. P.

2º ano - Turma B

Data: 06/10/2016

Agora que você conhece o Triângulo de Pascal, responda:

1. Que regularidade você observou na construção de linhas do triângulo?

Resposta: A soma de dois números de uma linha qualquer é igual ao número que esta abaixo do segundo número somado.

2. Algum outro padrão pode ser encontrado no corpo do triângulo? Cite-os.

Resposta: A soma da diagonal sempre dará o resultado abaixo do último número somado. Em todas as linhas os extremos são iguais e números equidistantes apresentam o mesmo valor.

3. Some os dois primeiros elementos da segunda coluna. Em seguida, some os três primeiros da mesma coluna. Faça isso novamente com os quatro primeiros elementos dessa coluna. Observando os resultados, o que você pode concluir?

É possível determinar um elemento de uma linha só observando a soma dos elementos da coluna anterior a que ele pertence?

Resposta: sim, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

4. Quais serão os números presentes na próxima linha do Triângulo? Complete a figura até a 10ª linha.

Resposta: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

APÊNDICE C - RELATOS DOS ALUNOS

1. K.P.S. (2º. ano A)

No dia 29/09/2016, no período das 9h 35 min às 10h 23 min, durante a aula de matemática, com o professor Erildo Sousa, os alunos da turma 2º. A ficaram responsáveis de produzir materiais, os quais foram utilizados para o esquema do conteúdo que está atualmente sendo estudado: A teoria da contagem. A atividade proposta pelo professor foi dividida entre os estudantes, enquanto uns dobravam e recortavam os papéis, outros escreviam números nestes, respectivamente. Há outros que obteve um modo diferenciado de aprendizado, com jogos de lógica relacionado ao conteúdo da aula. Também teve alguns alunos que foram ao quadro com o objetivo de construir a representação de um triângulo que recebe o nome de Triângulo de Pascal. Todas as atividades realizadas no laboratório de matemática.

2. B. R. (2º. ano A)

Na aula do dia 29 de setembro de 2016, o professor nos levou para o laboratório de matemática, chegando lá ele mandou alguns alunos cortarem papeis e escreverem números para fazermos o triângulo de aritmético ou Triângulo de Pascal. O professor separou a turma em três grupos, cada grupo tinha uma função e depois dois alunos de cada grupo demonstrava no quadro o que fez. O professor nos ensinou como fazia e explicou as formas e os padrões do triângulo, a propriedade das somas, das linhas e colunas. Também pediu a nós alunos que descobrissem quantos triângulos podemos formar a partir de quatro pontos não alinhados. Assim, no fim da aula nós entendemos sobre o conteúdo, trocando ideias e descobertas com nossos colegas. Essa forma de aprender é muito boa, pois, fixa mais e os alunos aprendem com mais facilidade.

3. S.T.D.M. (2º ano A)

Na última aula que tivemos de matemática o professor nos levou até o laboratório de matemática e os alunos se separaram e cada grupo teve uma função, enquanto o professor explicava o conteúdo para um grupo de alunos, o outro ficava encarregado de cortar quadrados para por números, outros colocavam números e o restante dos alunos fazia triângulos ou ajudava o professor no quadro, particularmente eu achei o triângulo de Pascal bem interessante e legal de fazer e acho que a aula anterior foi bem divertida e produtiva para a maioria dos alunos e espero que tenham mais aulas assim.

4. R.L.P. (2º ano A)

Na última aula fomos ao laboratório de matemática e fizemos muitas atividades como o triângulo de Pascal no quadro de isopor, aprendemos vários padrões, aprendemos muitas coisas, e fizemos formas geométricas com elásticos, algo bem legal porque aprendemos novas formas, e fizemos a junção de várias formas em uma forma só. Foi uma aula interessante que deu para adquirir muito conhecimento sobre os triângulos, foi divertido.

5. A.P.C. (2º. ano A)

Na última aula, fomos para o laboratório de matemática com o intuito de um aprendizado sobre o triângulo de Pascal, na verdade sobre os triângulos em geral, foram repartidos em vários grupos, mas todos tiveram grande participação, e com gestos simples de brincadeira aprendemos, claro com o professor sempre orientando, uma aula diferente que acredito ter tido grandes resultados.

6. L.F.M. (2º. ano A)

Na realizada no dia 29 de setembro de 2016, fomos ao laboratório de matemática fizemos os triângulos de Pascal, descobrindo padrões e aprendemos como calcular os padrões, fizemos atividades onde devemos encontrar os triângulos dentro de 4 pontos buscando-os jogando jogos geométricos e descobrindo como achá-los.

7. V. M. F. (2º. ano B)

No laboratório de matemática aprendemos sobre o triângulo de Pascal, uma sequência numérica triangular infinita, que tem o seguinte formato de regras: a soma dos números de cima define o resultado do número de baixo, também se pode descobrir o número de baixo por uma soma diagonal. Além do triângulo foi apresentado a torre de Hanói, um quebra-cabeça feito por três pinos que são colocados discos em ordem decrescente e deve-se passar todos os discos de um extremo para o outro de forma que um disco maior nunca fique sobre um disco menor.

8. K. B. A. (2º ano B)

No dia 05/10/2016 fomos ao laboratório de matemática onde aprendemos sobre o triângulo de Pascal como montá-lo e suas regras básicas, ele é um triângulo numérico infinito formado por números binominais, onde a soma dos números de cima define o resultado do número de baixo, também existe outras maneiras de calcularmos ele como a soma diagonal.

9. C.H. (2º ano B)

No dia 05/10/16, fomos a sala de matemática para que nós assistíssemos a aula de matemática, na qual falava do triângulo de Pascal. Os alunos também receberam o auxílio de um jogo, para fazer o triângulo de forma diferentes no qual havia quatro formas. Já no quadro de isopor montamos o triângulo que vimos que a soma de dois números sempre aparecerão abaixo e sempre a direito, e também a repetição do número 1 que se repete no começo e fim, para deixar os números mais localizados fizemos coloridos.

10. E.H.S. (2º ano C)

Na última aula de matemática, o professor Erildo desenvolveu sua aula de modo diferente, especificamente, foi uma aula prática. Conduziu a nós, alunos, à sala onde contém jogos e banners que de um modo contundente contribuiu para nosso aprendizado. Interagimos entre nós e com o professor, com os jogos que também se encaixava no tema de Análise Combinatória. Ambos os temas da matéria matemática proporcionou um aprendizado diferente e mais esclarecedor. Aulas como esta é de grande valia para os alunos, onde nós aprendemos participando mais da matéria e também interagindo mais.

11. S.R.P. (2º. ano C)

Na aula de matemática do dia 29/09/16 (quinta feira), foi diferente, uma aula prática eficiente para fixar melhor o aprendizado sobre o triângulo de Pascal de uma forma divertida. Preenchemos com 1's os lados do triângulos a partir do vértice superior e para obter os números em cada linha, somamos os dois números logo acima dele na linha superior, ex: $2 = 1 + 1$, ou seja, o número 2 da terceira linha é igual à soma de $1 + 1$, os dois números logo acima dele na segunda linha, assim $3 = 1 + 2$, $6 = 3 + 3$, $10 = 4 + 6$, etc.

12. A.P.W. (2º. ano C)

A aula de matemática quando realizado de um modo prático contribui mais para o aprendizado do aluno. Nesse seguimento é o que aconteceu na aula do 2º ano C, onde o professor deu sua aula com jogos, que os estudantes interagiam entre si compreendendo um pouco do conteúdo “Triângulo de Pascal” de forma mais objetiva e interessante. Essa última aula neste espaço é de grande proveito para os alunos, quando trabalhado os estudantes participam realmente das aulas.

13. D.S.B. (2º. ano C)

No dia 29 de setembro, estivemos no laboratório juntamente com o professor Erildo, apresentando alguns trabalhos que foram elaborados. Um dos mais selecionados é o triângulo de Pascal, onde podemos dispor os números binominais em formações triangulares. Além disso foi proposto para nós, algumas atividades, dentre elas, a montagem do triângulo de Pascal, em que aprendemos formas conclusivas, uma delas, é a soma dos números binominais da linha de cima, em que consiste, o resultado da linha de baixo. Em geral, sabemos que foi uma aula divertida e que literalmente seja uma das melhores aulas que estive no planejamento.

14. G.M.S. (2º. ano C)

Na aula de Matemática do dia vinte e nove de setembro tivemos uma aula divertida, dinâmica, e muito interessante, pois com vários jogos e banners encontrados na sala especializada, pode fazer com que os alunos desperta-se o interesse em desenvolver aqueles jogos, como o kit do explorador matemático, onde podemos colocar em prática como desenvolver alguns exercícios. Em minha opinião deveríamos ir com mais frequência, pois foi uma aula muito boa e interessante, onde todos os alunos puderam participar e interagir.

15. C.L.M. (2º. ano D)

Com aquela aula que tivemos diferente, achei que nos proporcionou grandes possibilidades de estudo, como é uma aula prática. A gente se diverte e aprende muito mais. E faz com que, nós gostamos de praticar a matemática. Além de ser um grande exercício de raciocínio lógico, fazendo com que a gente estimule nossa capacidade de pensar. Eu adorei esse tipo de aula, e achei encantadoras as quantidades de formas, para descobrirmos um único resultado.

16. K.L.P. (2º. ano D)

A última aula de matemática foi bastante proveitosa, foi uma aula diferente do que estávamos acostumados a ter, gostei muito, pois acredito que na prática, quando podemos tocar e fazer aprendemos muito mais. Gostaria de poder ter novamente outra aula igual ou parecida aquela, poder ver jogos incríveis de triângulos, aprender mais sobre o triângulo de Pascal que foi o que mais me encantou de todas as coisas que tinha lá. Gostei muito, de verdade, obrigada professor por ter proporcionado uma aula diferente e gostosa de ter.

17. S.L.S. (2º. ano E)

Matemática é usada em tudo no nosso dia a dia, nas compras, na escola, no trabalho e em outros vários lugares. A rotina de aprender só no livro e escrevendo no caderno acaba ficando enjoativa, onde terá um resultado de aprendizagem menor. Na prática aprendemos mais, fica divertido, o tempo até passa mais rápido. Além de ver, nós interagimos com as peças, racionando para chegar aos cálculos e resultados. É diferente para nós pois é rara as vezes de aulas assim, mas depende do comportamento dos alunos para mais aulas assim. Fizemos triângulos, usamos triângulo de Pascal e kit explorador de matemática. Foi 10, pra aprendermos existe vários meios e esse é um dos essenciais para um resultado de aprendizagem melhor. Quem fez a aula é o professor e o aluno. É muita gente para pouco espaço, mais um dia tudo talvez terá um lugar para cada meio de aprendizagem.

18. L.R.L. (2º. ano E)

No que se refere a aula de matemática é uma das coisas mais interessante a meu ponto de vista, principalmente quando podemos ter interação. Na última aula fomos ter uma aula prática no laboratório de matemática, foi muito produtiva, lá vimos que Pascal criou uma sequência de números infinitos, também vimos que com uma sequência de 4 pregos em uma tábua podemos formar 4 triângulos, cujos vértices serão A, B, C e D a sequência de triângulos são: $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ e $\triangle BDC$. Enfim, aulas como essa nos fazem alunos mais interessados em matemática, abrangendo nosso intelecto.

19. M.N.S. (2º. ano E)

Na aula anterior saímos da sala e fomos para o laboratório e tivemos uma aula interessantíssima, aprendemos quantos triângulos podemos formar com 4 pontos fixos e após pregarmos na tábua, vimos que poderíamos formar 4 triângulos, mesmo com seus pontos fixos, utilizamos elásticos, também vimos que a utilização Binária dos números forma uma sequência infinita chamada de Triângulo de Pascal.

20. D.A. (2º. ano E)

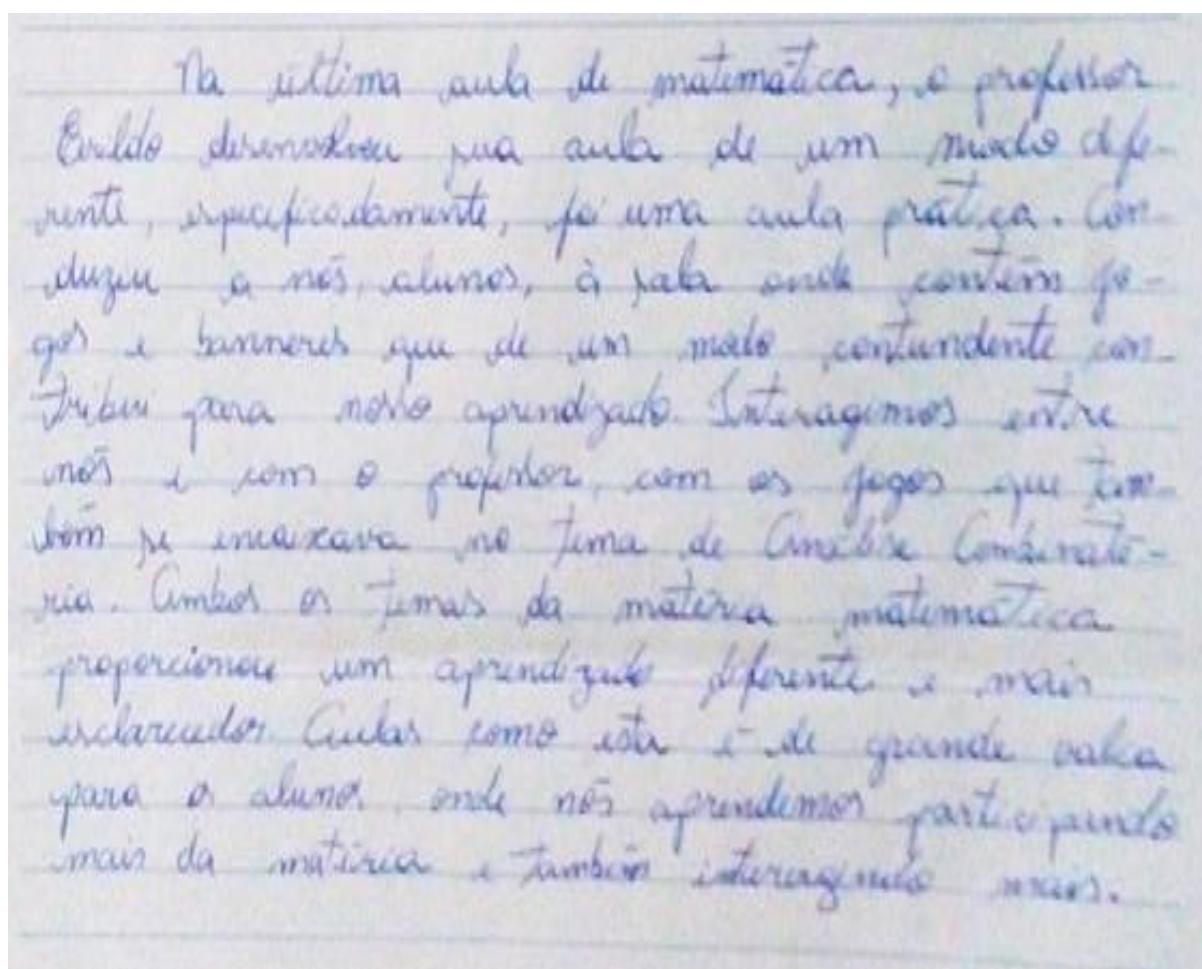
Na última aula, do professor Erildo, todos os alunos fomos ao laboratório de matemática para testar várias formas de fazer triângulos no kit explorador de matemática. Gostei bastante pois a produtividade dos alunos lá é maior. Vimos que com uma sequência de 4 pinos presos em um “tabuleiro” conseguimos uma sequência de 4 triângulos. No laboratório aprendemos várias coisas entre elas criar triângulos, sequências infinitas, com essa visita ao laboratório eu vi com novos olhos a matemática, como algo de grande importância em nossas vidas.

21. K.C. (2º. ano E)

Matemática é tudo na nossa, tudo que fazemos está a matemática. Gostei muito da aula de matemática, é bem diferenciada, e aprendemos muito mas, matemática não é só continha, matemática é vida. Aprendi sobre o triângulo de Pascal, coisa que nunca tinha visto, o kit explorador de matemática é bem legal, dá para construir triângulos, figuras geométricas e muito mais. Gostaria de participar mais, elaborar mais painéis com triângulos. Com a rotina dos livros, acaba ficando enjoativa, na prática, aprendemos mais e acaba ficando mais divertido, o tempo passa mais rápido e fica bem mais interessante.

APÊNDICE D - DEPOIMENTOS DOS ALUNOS

“Na aula do dia 29 de setembro de 2016, o professor nos levou para o laboratório de matemática, chegando lá ele mandou alguns alunos cortarem papéis e escreverem números para fazermos o triângulo de aritmético ou Triângulo de Pascal. O professor separou a turma em três grupos, cada grupo tinha uma função e depois dois alunos de cada grupo demonstrava no quadro o que fez. O professor nos ensinou como fazia e explicou as formas e os padrões do triângulo, a propriedade das somas, das linhas e colunas. Também pediu a nos alunos que descobrissem quantos triângulos podemos formar a partir de quatro pontos não alinhados. Assim, no fim da aula nos entendemos sobre o conteúdo, trocando ideias e descobertas com nossos colegas. Essa forma de aprender é muito boa pois, fixa mais e os alunos aprendem com mais facilidade.” (B., 2º ano A).



Matemática é usada em tudo na nossa dia a dia, nas compras, na escola, no trabalho e em outros vários lugares. A rotina de aprender lá no livro e escrevendo no caderno acaba ficando entediante, onde terá um resultado de aprendizagem menor. Na prática aprendemos mais, fica divertido, o tempo até passa mais rápido.

Além de ser, mais interativos com as peças, raciocinamos para chegar aos cálculos e resultados. É diferente para nós pois é raro as vezes de aulas assim, mas depende do comportamento dos alunos para mais aulas assim.

Fizemos triângulos, usamos triângulo de Pascal e Kit explorador de matemática. Foi lá, pra aprendermos existe várias meios e este é um dos essenciais para um resultado de aprendizagem melhor. Quem faz a aula é o professor e o aluno. É muita gente para poucos espigos, mais um dia tudo talvez, terá um lugar para cada meio de aprendizagem.

No última aula fomos ao laboratório de matemática e fizemos muitas atividades, como o triângulo de Pascal no quadro de papel, aprendemos vários padrões, aprendemos muitas coisas, e fizemos formas geométricas com elásticas, algo bem legal porque aprendemos novas formas, e fizemos a junção de várias formas em uma forma só. Foi uma aula interessante que deu para adquirir muito conhecimento sobre os triângulos, foi divertido.

Na última aula de matemática o professor nos levou para o laboratório de matemática. Quando lá de manchar alguns alunos cortaram papéis e escreveram números para formarem o triângulo de Pascal. O professor explicou a tarefa em três grupos, cada grupo tinha uma função, depois disso cada um de cada grupo demonstrava no quadro o que fez. O professor nos ensinou como fazer e explicou as fórmulas e as partes do triângulo, a propriedade dos somas das linhas, colunas. Também nos mostrou quanto triângulos de quatro pontos poderiam formar. Assim, no fim da aula nós entendemos sobre o conteúdo, tirando dúvidas e discutindo com nossos colegas sobre como aprender e muito mais pois, por isso, muitos alunos aprenderam com mais facilidade.

Na última aula que nós tivemos de matemática o professor nos levou até o laboratório de matemática e os alunos se separaram e cada grupo teve uma função, enquanto o professor explicava o conteúdo para um grupo de alunos, outro ficava encarregado de cortar quadradinhos para por números, outros colocavam números e o resto fazia triângulos ou ajudava o professor no quadro, particularmente eu achei o triângulo de Pascal bem interessante e legal de fazer e acho que a aula passada foi bem divertida e produtiva para a maioria dos alunos e espero que tenhamos mais aulas assim.

Na última aula, fomos para o laboratório de matemática com o intuito de um aprendizado sobre o triângulo de Pascal, na verdade sobre os triângulos em geral, fomos repartidos em vários grupos, mas todos tiveram grande participação, e com gestos simples de brincadeira aprendemos, claro com o professor sempre orientando, uma aula diferente que poderia ter tido grandes resultados.

Na última aula fomos ao laboratório de matemática fizemos os Triângulos de Pascal, descobrimos padrões e aprendemos como calcular os padrões, fizemos atividades onde descobrimos dentro os Triângulos dentro de 4 pontos buscamos as figuras geométricas e descobrimos como calcular.

A última aula de matemática foi bastante interessante, foi uma aula diferente de que costumamos acostumados a ter, gostei muito, pois acredito que na prática quando podemos tocar e fazer aprendemos muito mais. Gostaria de poder ter novamente outra aula igual ou parecida aquela, poder ver jogos interessantes de triângulos, aprender mais sobre o triângulo de Pascal que foi o que mais me encantou de todas as coisas que tinha lá. Gostei muito, de verdade, obrigada professor por ter proporcionado uma aula diferente e gostosa de ter.

Triângulo de Pascal

No que se refere a aula de matemática é uma das mais interessantes o meu ponto de vista, principalmente quando podemos ter interações.

Na última aula fomos ter uma aula prática no laboratório de matemática, foi muito produtiva, lá vimos que Pascal criou uma sequência de números infinitos, também vimos que com uma sequência de 4 pregos presos em uma tábua podemos formar 4 triângulos, cujo lados A, B, C e D a sequência de triângulos ABC, BDC, ABD e ACD. Enfim, aulas como essa nos fazem alunos mais interessados em matemática, abrangendo nosso intelecto.